

Physik der Sonne II

PD Dr. Wolfgang Schmidt, Prof. Dr. M. Stix

WS 2002/03

Inhaltsverzeichnis

1	Die Sonne im Überblick	4
1.1	Was ist ein Stern?	4
1.2	Beobachtbare Größen bei der Sonne	4
1.2.1	Entfernung (Astronomische Einheit)	5
1.2.2	Radius	5
1.2.3	Masse	6
1.2.4	Leuchtkraft	7
2	Innerer Aufbau der Sonne	8
2.1	Die wichtigsten Voraussetzungen	8
2.2	Wie alt ist die Sonne?	9
2.3	Frühphase der Sternentwicklung	10
2.3.1	Zeitskalen	11
2.4	Vor-Hauptreihen-Entwicklung der Sonne	13
2.5	Grundgleichungen der Sternentwicklung	15
2.5.1	Erhaltungssätze	15
2.5.2	Energietransport	17
2.5.3	Virialsatz	19
2.5.4	Änderung der Zusammensetzung	21
2.5.5	Diffusion im Sonneninneren	23
2.5.6	Zusammenfassung der Gleichungen der Sternentwicklung	24
2.5.7	Zustandsgleichung	24
2.6	Opazität	30
2.7	Nukleare Energieerzeugung	32
2.7.1	Wasserstoff-Fusionsreaktionen	35
2.8	Neutrinos	37
2.8.1	Neutrino-Experimente	39
2.8.2	Die "klassischen" Neutrino-Probleme	43
2.8.3	Wie genau sind die berechneten Neutrinoflüsse	45
2.8.4	Die Sonne als Neutrino-Quelle	45
2.8.5	Zusammenfassung	46
2.9	Sonnenmodell	48

Abbildungsverzeichnis

1	Sonnendurchmesserbestimmung	6
2	Hertzprung-Russell-Diagramm der Protostern-Entwicklung der Sonne . . .	14
3	Massenelement	15
4	Definition der Intensität	18
5	Opazität als Funktion der Tiefe	32
6	Potentialschwelle	33
7	Gamow-Peak	34
8	Neutrino-Fluss als Funktion des Radius	38
9	Neutrino-Energiespektrum der Sonne	39
10	Cl-Neutrinos	41
11	Gallex-Neutrinos	42
12	Aufbau des Borexino-Detektors	43
13	SNO-Ergebnisse (Neutrino-Oszillationen)	44
14	Schallgeschwindigkeit in der Sonne	46
15	Neutrinos: Theorie vs. Experiment	47
16	Der Entwicklungsweg der Sonne im Hertzprung-Russell-Diagramm . . .	48
17	Radius als Funktion der Masse	49
18	Masse und Druck als Funktion des Radius	49
19	Temperatur, Leuchtkraft u. Dichte im Sonneninneren	50

1 Die Sonne im Überblick

1.1 Was ist ein Stern?

Die einfachste Definition für einen Stern enthält zwei Bedingungen:

- (i) Zusammenhalt durch Eigengravitation
- (ii) Emission von Strahlung, die durch eine innere Energiequelle gespeist wird.

Aus der ersten Bedingung folgt sofort, dass ein Stern sphärisch symmetrisch sein muss, da die Gravitation ein sphärisch symmetrisches Kraftfeld besitzt. Eine gewisse Verformung kann beispielsweise durch zusätzliche axialsymmetrische Kräfte, z.B. Zentrifugalkraft infolge Rotation, auftreten.

Die zweite Definition unterscheidet zwischen "echten" Sternen und Planeten. Letzere sehen am Himmel zwar aus wie Sterne, aber sie leuchten nicht aus sich selbst heraus, sondern reflektieren das Licht der Sonne. Bei den inzwischen über 100 extrasolaren Planeten ("Exoplaneten") ist es das Licht des dazugehörigen Zentralsterns, was man in der Zukunft vielleicht einmal beobachten können. (Bis heute gibt es keinen direkten Nachweis extrasolarer Planeten durch Beobachtung des durch sie reflektierten Lichtes, vielmehr wurden allesamt durch indirekte Methoden gefunden).

Eine weitere Folge der zweiten Bedingung ist die Entwicklung von Sternen: infolge der intern produzierten Energie muss es Änderungen in der Zusammensetzung oder in der Struktur des Sterns geben, oder beides. Das Ende ("der Tod") eines Sterns tritt ein durch die Verletzung einer der beiden Bedingungen. Ist der Zusammenhalt durch Eigengravitation nicht gegeben, explodiert der Stern. Versiegt die innere Energiequelle, wird der Stern nach und nach abkühlen und schließlich erlöschen. Letzteres wird in ferner Zukunft das Schicksal der Sonne sein.

1.2 Beobachtbare Größen bei der Sonne

Die Sonne wird in der Astrophysik oft als ein durchschnittlicher, gewöhnlicher Stern bezeichnet. Damit ist gemeint, dass er unter den 100 Milliarden Sternen der Milchstraße eine durchschnittliche Helligkeit, eine typische Größe und ein mittleres Alter hat. Aus der Sicht der Menschheit ist die Sonne natürlich etwas ganz Besonderes, Einzigartiges, ja der einzige Stern, auf den es wirklich ankommt. Aber auch für die Astrophysik beschränkt sich das Attribut "gewöhnlich" auf die genannten Eigenschaften. Aufgrund der außergewöhnlichen Nähe (der nächste Nachbarstern, Proxima Centauri, ist über 4 Lichtjahre von der Erde entfernt, das ist das 300.000-fache der Entfernung zur Sonne) können wir Details ihrer Oberfläche beobachten, und seit einigen Jahren sind wir auch in der Lage, direkte Information über die Struktur des Sonneninneren und auch über die Prozesse der Energieerzeugung zu erhalten. Ersteres ist durch die Beobachtung der solaren Oszillationen und die Helioseismologie möglich, letzteres durch die Messung von solaren Neutrinos. Von beidem wird in dieser Vorlesung noch die Rede sein.

Betrachten wir zunächst diejenigen Eigenschaften der Sonne, die sich ohne Kenntnis ihres Aufbaus und der Energiequelle bestimmen lassen, sie charakterisieren die Sonne als Stern. Diese Größen sind die Masse, der Radius und die Leuchtkraft (Strahlungsleistung). Dazu kommt die Entfernung zwischen Erde und Sonne. Die Entfernung hat zwar mit der Sonne selbst nichts zu tun, ist aber zur Bestimmung der anderen Größen unverzichtbar.

1.2.1 Entfernung (Astronomische Einheit)

Hierzu benötigt man die Beobachtung von Umlaufbahnen und -Zeiten von Planeten, sowie eine genaue Entfernungsbestimmung (Radarecho). Mithilfe des 3. Keplerschen Gesetzes bestimmt man die Verhältnisse der Halbachsen der Planetenbahnen:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{t_1^2 (1 + m_1/m_s)}{t_2^2 (1 + m_2/m_s)} \quad (1)$$

Die Planetenmassen kann man anhand der Störung der Bahnen ermitteln. Die Entfernung zwischen Erde und Sonne wird oft in Einheiten der Lichtlaufzeit angegeben und ist eine der primären Größen im System der Astronomischen Konstanten der IAU:

Lichtlaufzeit Sonne - Erde:

$$\tau_A = 499.004782 \pm 0.000006s \quad (2)$$

Aus der Lichtlaufzeit τ_A erhält man, mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$, die Astronomische Einheit zu

$$\mathbf{A=149597870 \pm 2 \text{ km}}$$

Der Abstand Erde - Sonne variiert zwischen 1.47110^{11} m (Perihel, Januar) und 1.52110^{11} m (Aphel, Juli). Dementsprechend ändert sich die Strecke auf der Sonnenoberfläche, die einem Winkel von einer Bogensekunde entspricht (ein in der Sonnenforschung beliebtes Längenmaß) von 710 km (Perihel) bis 734 km (Aphel).

1.2.2 Radius

Der Sonnenradius wird aus dem Winkeldurchmesser und der Entfernung bestimmt: erstes erfolgt beispielsweise durch Bestimmung der Wendepunkte der Intensitätskurven an beiden Rändern der Sonne (vgl. Abb. 1). Diese Messungen sind prinzipiell sehr einfach, erfordern aber eine hohe Präzision und Genauigkeit¹. Letzteres erfordert vor allem eine sehr genaue Kenntnis des Abbildungsmaßstabes des verwendeten Teleskops (z. B. Wittmann, 2002). Man erhält für den Winkeldurchmesser φ_S einen mittleren Wert von 1920

¹Die Begriffe Präzision und Genauigkeit, sowie die englischen Entsprechungen, *precision* und *accuracy* werden oft verwechselt bzw. falsch eingesetzt. Die Präzision einer Messung hängt mit der Messgenauigkeit zusammen und damit auch mit der Reproduzierbarkeit. Sie sagt aber nichts aus, wie nahe das Messergebnis am *wahren* Wert der gemessenen Größe liegt. Die Genauigkeit der Messung hängt wesentlich von den systematischen Fehlern ab, bzw. davon ob und wie gut sie bekannt sind. Eine Messung kann sehr präzise sein und trotzdem ein falsches Ergebnis liefern. Andererseits kann eine unpräzise Messung niemals genau sein.

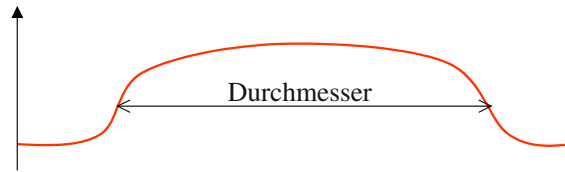


Abbildung 1: Bestimmung des Sonnendurchmessers aus dem Intensitätsverlauf.

Bogensekunden. Dieser Wert bezieht sich auf eine optische Tiefe τ von ca. 0.001. Die optische Tiefe 1 wird einige Hundert km tiefer erreicht. Der Unterschied beträgt weniger als eine Bogensekunde. Aus dem Winkeldurchmesser und der Astronomischen Einheit wird der Sonnenradius bestimmt zu

$$R_S = 0.5A\varphi_S = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m.} \quad (3)$$

Beachte: Aus Helioseismologiemessungen ergibt sich ein um einige 100 km geringerer Wert!

Man kann den Winkeldurchmesser der Sonne auch völlig ohne Messgeräte ungefähr bestimmen: Man bedecke die Sonnenscheibe mit der Spitze des kleinen Fingers bei ganz ausgetrecktem Arm (!! Vorsicht, nicht in die Sonne schauen!!). Aus der Breite des Fingers, $d_F=9 \text{ mm}$, und der Entfernung der Fingerspitze vom Auge, $a_F=800 \text{ mm}$ erhält man sofort $r_\varphi = 9/800 = 0.0112$, gar nicht so weit entfernt vom korrekten Wert 0.0093

1.2.3 Masse

Sobald die Entfernungen bekannt sind, kann man aus dem 3. Keplerschen Gesetz die Sonnenmasse bestimmen. Allerdings kann man nur das Produkt $G \cdot m_S$ mit hoher Genauigkeit angeben. Aus Labormessungen² erhält man für die Gravitationskonstante

$$G = (6.672 \pm 0.004) 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2};$$

daraus folgt die Sonnenmasse:

$$m_S = (1.9891 \pm 0.0012) \cdot 10^{30} \text{ kg.} \quad (4)$$

Das ist der aktuelle Wert. Die wesentlichen Prozesse, die zu einer Massenänderung führen, sind

Massenverlust durch Leuchtkraft: $dm/dt = L/c^2 = 4 \cdot 10^9 \text{ kgs}^{-1}$,

Massenverlust durch Sonnenwind: $dm/dt = L/c^2 \approx 10^9 \text{ kgs}^{-1}$.

Der Gesamtverlust in 4.5 Mrd. Jahren ($=1.42 \cdot 10^{17} \text{ s}$) beträgt rund 10^{27} kg . Dies liegt innerhalb der Fehlergrenzen der Massenbestimmung und kann – insbesondere auch für die Beschreibung der Sternentwicklung – vernachlässigt werden.

²Drehwaage, Cavendish, um 1800

1.2.4 Leuchtkraft

Die Leuchtkraft der Sonne kann – ohne Kenntnis des inneren Aufbaus – auf zweierlei Weisen abgeschätzt bzw. bestimmt werden.

1. Maximum der Strahlungskurve

Die Oberflächentemperatur kann man aus dem beobachteten Maximum der Strahlungskurve abschätzen. Die dazugehörige Temperatur erhält man aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz und der Annahme, dass die Sonne wie ein Schwarzer Körper strahlt:

$$\lambda T = 2.910^{-3} m \cdot K. \quad (5)$$

Das gemessene Maximum liegt bei 500 nm, daraus folgt aus Gl. 5

$$T = \frac{2.910^{-3}}{5 \cdot 10^{-7}} = 5800 K \quad (6)$$

Die Flussdichte P_A an der Sonnenoberfläche kann man aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ³ $P_A = \sigma T^4$ berechnen. Mit $T=5800$ K erhält man für die Flussdichte $P_A = 6.5 \cdot 10^7 \text{ Wm}^{-2}$. Die Gesamtleistung der Sonne (=Leuchtkraft) ist dann gegeben durch

$$L = P = 4\pi r_S^2 P_A = 4 \cdot 10^{26} W. \quad (7)$$

2. Solarkonstante:

Die zweite Messung kommt ganz ohne astronomische Sonnenbeobachtung aus. Man bestimmt radiometrisch die Solarkonstante am Ort der Erde und berechnet – unter Verwendung der Astronomischen Einheit – den Strahlungsfluss an der Sonnenoberfläche. Moderne (mit Weltraumexperimenten gewonnene) Messungen der Solarkonstanten ergeben einen (mittleren) Wert von $S=1376 \text{ Wm}^{-2}$. Hieraus erhält man sofort den korrekten Wert der Sonnenleuchtkraft L :

$$L = S \cdot 4\pi (A - r_S)^2 = 3.84 \cdot 10^{26} W. \quad (8)$$

Für ein genaues Resultat verwendet man in Gl. 8 nicht die Astronomische Einheit, sondern die genaue Entfernung zwischen Sonne und Erde zum Zeitpunkt der Messung. Es muss hier erwähnt werden, dass genaue Messungen der Solarkonstanten erst seit etwa 20 Jahren ⁴ möglich sind, ältere Messungen waren zur Bestimmung der Sonnenleuchtkraft nicht genau genug. Die heutigen Satellitenmessungen haben eine Präzision von 10^{-4} (0.1 W) und eine absolute Genauigkeit von etwa 10^{-3} (1 W).

³Stefan-Boltzmann-Konstante: $\sigma = 5.6705 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$

⁴die seit 1978 durchgeführten Satellitenmessungen haben inzwischen auch die Variabilität der Solarkonstanten bestätigt

2 Innerer Aufbau der Sonne

2.1 Die wichtigsten Voraussetzungen

- Isoliertheit

Diese Bedingung bedeutet, dass die Sonne sich im leeren Raum befindet, ohne (gravitative) Beeinflussung durch andere benachbarte Körper. Dies ist in guter Näherung erfüllt, befindet sich doch der nächstgelegene Stern etwa $6 \cdot 10^7$ Sonnenradien entfernt. Einflüsse des Planetensystems werden bei der Bestimmung des inneren Aufbaus ebenfalls vernachlässigt⁵.

- Homogene chem. Zusammensetzung zu Beginn der Entwicklung

Sterne entwickeln sich innerhalb von interstellaren Wolken, die eine Gesamtmasse von 1000 oder mehr Sonnenmassen haben. Die genauen Prozesse, die zur Fragmentierung der Wolken und damit zur Sternbildung führen, sind noch nicht bekannt. Es ist auf jeden Fall sinnvoll, zu Beginn der Sternentwicklung eine homogene chemische Zusammensetzung anzunehmen. Dafür spricht auch die Tatsache, dass die Elementhäufigkeit bei Sternen erstaunlich ähnlich ist. Diese wird spektroskopisch an der Sternoberfläche bestimmt, die von der Sternentwicklung praktisch nicht beeinflusst wurde, d.h. sie spiegelt mehr oder weniger die ursprüngliche chemische Zusammensetzung wider.

- Sphärische Symmetrie

Diese Bedingung ist naheliegend, weil die Gravitationsanziehung sphärisch symmetrisch ist. Aus der sphärischen Symmetrie folgt aber auch sofort, dass beispielsweise die Rotation keine Rolle spielen soll. Bei der Sonne beträgt die Rotationsperiode am Äquator rund 27 Tage, daraus folgt eine Winkelgeschwindigkeit $\omega \approx 2.5 \cdot 10^{-6}$ Hz. Für das Verhältnis von Rotationsenergie zu Gravitationsenergie ergibt sich in der Tat ein sehr kleiner Wert, so dass die Voraussetzung der sphärischen Symmetrie bei der Sonne erfüllt ist:

$$\frac{E_{rot}}{E_{grav}} = \frac{M\omega^2 R_S^2}{GM^2/R} = \frac{\omega^2 R_S^3}{G} \approx 2 \cdot 10^{-5}. \quad (9)$$

Als weitere axialsymmetrische Kraft kommt ein Magnetfeld in Frage. Bei der Sonne erhält man für das Verhältnis von magnetischer zu gravitativer Energiedichte einen Wert von

$$\frac{\epsilon_B}{\epsilon_{Grav}} = \frac{B^2/2\mu_0}{\frac{GM^2/R}{4/3\pi R_S^3}} = \frac{B^2 R_S^4}{\mu_0 GM^2} \approx 10^{-11}. \quad (10)$$

Hierbei wurde für das Magnetfeld ein Betrag von 0.1 T angesetzt. Daraus ist ersichtlich, dass magnetische Kräfte beim inneren Aufbau der Sonne auf jeden Fall vernachlässigt werden können.

⁵Der Massenschwerpunkt des Systems Sonne — Jupiter liegt weit außerhalb des Sonnenzentrums, fast an der Sonnenoberfläche.

2.2 Wie alt ist die Sonne?

Das Alter der Sonne kann man nicht ohne Weiteres bestimmen, jedenfalls nicht BEVOR man die für die Sternentwicklung relevanten Rechnungen gemacht hat. Man kann jedoch sehr zuverlässig das Alter der Erde bzw. anderer Mitglieder des Sonnensystems, z. B. Meteoriten bestimmen, unter Verwendung des radioaktiven Zerfalls bestimmter Isotope, z. B. ^{87}Rb , welches eine Halbwertszeit von $4.8 \cdot 10^{10}$ Jahren hat. Die Altersbestimmung basiert auf dem Beta-Zerfall des Isotops ^{87}Rb nach ^{87}Sr .



Man bestimmt hierbei die Häufigkeit des Ausgangsmaterials und des Zerfallsprodukts, jeweils relativ zu der konstanten Häufigkeit des nichtradioaktiven Elements ^{86}Sr . Man braucht mindestens zwei Proben ($i=1,2$), die das gleiche Alter t haben. Für diese Proben gilt:

$$n_i(^{87}\text{Rb}) = n_{i0}(^{87}\text{Rb}) \cdot e^{t/\tau}, \quad (12)$$

und

$$n_i(^{87}\text{Rb}) + n_i(^{87}\text{Sr}) = n_{i0}(^{87}\text{Rb}) + n_{i0}(^{87}\text{Sr}). \quad (13)$$

Als weitere Bedingung kann man annehmen, dass das Isotopenverhältnis zwischen dem radioaktiven und dem stabilen Isotop des Sr ursprünglich, d.h. für $t=0$ gleich war. Da sich die Häufigkeit des stabilen Isotops nicht geändert hat, gilt

$$\frac{n_{10}(^{87}\text{Sr})}{n_1(^{86}\text{Sr})} = \frac{n_{20}(^{87}\text{Sr})}{n_2(^{86}\text{Sr})}. \quad (14)$$

Weiterhin gilt die bekannte Beziehung

$$t_{1/2} = \ln 2 / \tau. \quad (15)$$

mit der Zerfallszeit τ und der Halbwertszeit $t_{1/2}$. Mit zwei Proben, $i=1,2$, hat man fünf Gleichungen für die Unbekannten $n_{10}(^{87}\text{Rb})$, $n_{20}(^{87}\text{Rb})$, $n_{10}(^{87}\text{Sr})$, $n_{20}(^{87}\text{Sr})$ und das gesuchte Alter t . Aus den Gleichungen 12, 13 und 14 kann man nun die unbekanntes Häufigkeiten eliminieren und erhält schließlich

$$e^{t/\tau} = 1 + \frac{\frac{n_2(^{87}\text{Sr})}{n_2(^{86}\text{Sr})} - \frac{n_1(^{87}\text{Sr})}{n_1(^{86}\text{Sr})}}{\frac{n_2(^{87}\text{Rb})}{n_2(^{86}\text{Sr})} - \frac{n_1(^{87}\text{Rb})}{n_1(^{86}\text{Sr})}}. \quad (16)$$

Aus Proben von chondritischen ⁶ Meteoriten erhält man Wesentlichen immer dasselbe Alter:

⁶Chondrite sind die häufigsten Meteorite (84 %), sie enthalten millimetergroße Silikatkugeln. Im Gegensatz zu den Eisenmeteoriten (Häufigkeit 6 %) entspricht ihre Zusammensetzung im Wesentlichen der chemischen Zusammensetzung der ursprünglichen Sonnenmaterie (ohne Edelgase und andere leicht flüchtige Elemente)

$$t = 4.55 \pm 0.05 \cdot 10^9 \text{ Jahre.}$$

Beachte: Zur Altersbestimmung benötigt man mehr als eine Materialprobe mit denselben ursprünglichen Isotopenverhältnis $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ und demselben Alter. Die Proben können aber verschiedene heutige (und damit auch ursprüngliche) Verhältnisse von $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ haben. Durch mechanische Prozesse zur Zeit $t=0$ kann Rb von Sr getrennt werden, nicht aber die Sr-Isotope.

2.3 Frühphase der Sternentwicklung

Der gravitative Kollaps einer interstellaren Wolke beginnt, sobald die Gravitationsanziehung den inneren Druck der Gaswolke übersteigt. Dies ist der Fall, wenn das Jeans-Kriterium erfüllt ist:

$$\frac{Gm_c}{r} > \frac{\mathcal{R}T}{\mu}. \quad (17)$$

Die Größen μ , r , T und m_c bezeichnen das Molekulargewicht, den Radius die Temperatur und die Masse der der Wolke, \mathcal{R} ist die Gaskonstante. Man kann leicht abschätzen, dass man unter typischen interstellaren Bedingungen zur Erfüllung des Jeans-Kriteriums etwa 1000 Sonnenmassen benötigt ⁷. Eine der ungelösten Fragen der frühen Phase der Sternentwicklung ist es, auf welche Weise die kollabierende Wolke fragmentiert, so dass Sterne im Massenbereich von 0.1 bis 10 Sonnenmassen entstehen. Eine ausführliche Behandlung passt nicht in den Rahmen dieser Vorlesung, es sollen aber noch zwei weitere Probleme erwähnt werden, die im Zusammenhang mit dem Kollaps einer interstellaren Wolke von Bedeutung sind:

Drehimpuls Eine interstellare Wolke ist in Bewegung und hat daher einen gewissen Drehimpuls, der bei einem sphärisch symmetrischen Kollaps erhalten bleibt. Der Drehimpuls pro Masseneinheit einer Wolke beträgt etwa $10^{18} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. ⁸ Das heutige Sonnensystem hat einen um zwei Größenordnungen kleineren spezifischen Drehimpuls, d.h. während der Sternentstehung mussten 99 % des ursprünglich vorhandenen Drehimpulses abtransportiert werden.

Magnetfeld Das interstellare Feld hat eine Stärke von 10^{-10} T. Würde der magnetische Fluss, der in einer Wolke mit einer Sonnenmasse enthalten ist, bei der Bildung der Sonne erhalten, wäre das Feld auf eine Stärke von mindestens 10^6 T angewachsen. ⁹ Dies bedeutet, dass praktisch das gesamte ursprüngliche Magnetfeld abtransportiert werden musste.

⁷Mit $T=50$ K, $\rho=10^{-20}$; sphärische Symmetrie (ersetze r durch die mittl. Dichte).

⁸Zu Beginn des Kollapses hat eine Wolke etwa die Rotationsgeschwindigkeit der Galaxis, 10^9 Jahre. Ein Fragment mit der Masse der Sonne hat zu Beginn einen Radius von ca. $1.6 \cdot 10^{15}$ m. Bei Erhaltung des ursprünglichen Drehimpulses würde die Sonne eine Rotationsdauer von wenigen Stunden haben.

⁹...

Das Magnetfeld liefert einen geeigneten Mechanismus (Feldlinien als Hebelarm) für den Abtransport von Drehimpuls während des Kollapses. Das Magnetfeld kann später verschwinden, in einer Phase, in der das kollabierende Material elektrisch neutral ist, und somit Magnetfeld und Materie nicht mehr gekoppelt sind.

2.3.1 Zeitskalen

Die Entwicklung eines Sterns umfasst ganz unterschiedliche Prozesse und Arten von Veränderungen: es gibt dynamische Vorgänge, thermische Prozesse und schließlich die thermonukleare Energieproduktion durch Fusion. In diesem Abschnitt werden wir diese Prozesse durch ihre typischen Zeitskalen charakterisieren.

Als charakteristische Zeitskala definiert man als Verhältnis aus der Größe A , die verändert wird, und der Änderungsrate \dot{A} derselben Größe:

$$\tau = \frac{A}{\dot{A}} \quad (18)$$

Dynamische Zeitskala Die dynamische Zeit, oder Frei-Fall-Zeit. Ausgehend von

$$\ddot{r} = g = -\frac{GM}{r^2} \quad (19)$$

erhalten wir durch Multiplikation mit \dot{r}

$$2\dot{r}\ddot{r} = -2\dot{r}\frac{GM}{r^2}. \quad (20)$$

Diese Gleichung kann man integrieren und erhält

$$\dot{r}^2 = \frac{2GM}{r}, \quad \text{oder } v_{ff} = \dot{r} = -\left(\frac{2GM}{r}\right)^{1/2} \quad (21)$$

Die Zeitskala τ_{ff} ergibt sich dann zu

$$\tau_{ff} = \frac{r}{\dot{r}} = \sqrt{\frac{r^3}{2GM}}. \quad (22)$$

Mit dieser Definition schätzen wir nun die dynamische Zeitskala für verschiedene Entwicklungsphasen der Sonne ab:

- Heutige Sonne

Wir ersetzen den Radius in Gl. 22 durch die mittlere Dichte der Sonne $\bar{\rho}$, und erhalten näherungsweise

$$\tau_{ff} \approx \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}} \approx 3000s. \quad (23)$$

- Interstellare Wolke

Wir können dieselbe Abschätzung dazu verwenden, um die Frühphase der Sternentwicklung abzuschätzen. Die Dichte einer interstellaren Wolke zu Beginn des Kollapses beträgt etwa $10^{-20} \text{ kg m}^{-3}$. Aus Gl. 23 erhält man sofort $\tau_{ff} = 10^{15} \text{ s}$, das sind 30 Millionen Jahre.

Thermische Zeitskala Die thermische Zeitskala kann man interpretieren als die Zeitdauer, die ein Stern braucht, um, bei konstanter Leuchtkraft seinen gesamten Vorrat an thermischer Energie abzustrahlen, bei gleichzeitiger Kontraktion. Die typische Größe ist in diesem Fall die innere Energie U . Die dazugehörige Änderung ist die Rate, mit der die Energie abgestrahlt wird, d.h. die Leuchtkraft L . Die thermische Zeitskala ist somit der Quotient aus Vorrat und Verbrauch:

$$\tau_{th} = \frac{U}{L} = \frac{\frac{GM^2}{r}}{L} = \frac{GM^2}{rL} \quad (24)$$

In obiger Gleichung wurde der Virialsatz (s. Abschn. 2.5.3) angewandt.

Für die Sonne ($M=2 \cdot 10^{30}$ kg, $r=7 \cdot 10^8$ m, $L = 4 \cdot 10^{26}$ W) erhält man

$$\tau_{th} = \tau_{KH} = 10^{15} \text{ s} = 30 \text{ Millionen Jahre.} \quad (25)$$

Mit dieser Abschätzung hatten William Thomson (alias Lord Kelvin) und Hermann Helmholtz um 1860 das Alter der Sonne bestimmt.¹⁰ Aus diesem Grund wird die thermische Zeit auch oft als Kelvin-Helmholtz-Zeit bezeichnet.

Diese Bestimmung des Sonnenalters führte zu einem Konflikt mit der kurz zuvor (1859) veröffentlichten Theorie der Evolution durch C. Darwin. Lt. Darwin war eine erheblich längere Zeit vonnöten, um die vorhandene Vielfalt durch Evolution zu erklären. Etwa 60 Jahre später, im Jahr 1920 sprach Sir A. Eddington dann von einer *subatomic energy* in Sternen, die ausreichend sei, die Strahlung der Sonne für 15 Milliarden Jahre aufrechtzuerhalten. Zu der Zeit schienen Kernreaktionen noch unmöglich, weil die Temperatur im Sterninneren bei weitem nicht ausreichend war, um die Coulomb-Abstoßung zwischen Atomkernen zu überwinden. Dieses Problem wurde weitere 10 Jahre später durch die Quantenmechanik und den dadurch ermöglichten Tunneleffekt gelöst. Damit wurde auch die alte Kontroverse über das Weltalter zugunsten von Darwin entschieden.

Nukleare Zeitskala Bei nuklearen Prozessen ist die Ruhe-Energie $E = mc^2$ die Größe die sich verändert. Analog zur thermischen Zeitskala schätzen wir den Energievorrat ab zu $\epsilon M c^2$. Der Faktor ϵ ist die Bindungsenergie pro Nukleon, in Einheiten der Ruheenergie, er hat einen Wert von typischerweise 0.001. Damit erhalten wir

$$\tau_{nuc} = \frac{\epsilon M c^2}{L} = \epsilon \cdot 4.5 \cdot 10^{20} \text{ s.} \quad (26)$$

Dies ergibt einen Wert, der deutlich über dem Alter der Sonne liegt. Dies bedeutet, dass erst ein kleiner Teil der nuklearen Energie bis heute verbraucht ist, und dass man kein nukleares Gleichgewicht erwarten kann. Das heisst aber auch, dass der langsamste Prozess, τ_{nuk} , die Sternentwicklung bestimmt, und dass man jederzeit thermisches und hydrostatisches Gleichgewicht annehmen kann. Das vereinfacht die Gleichungen und die Rechnungen zum Sternaufbau ganz erheblich.

¹⁰Es gab durchaus auch Überlegungen, die aus heutiger Sicht absurd wirken, die aber in Ermangelung anderer Energiequellen und in Unkenntnis der tatsächlichen Strahlungsleistung der Sonne keineswegs völlig abwegig waren: Der Heizwert von Kohle beträgt 30 MJ/kg. Würde die Energie der Sonne durch Verbrennung produziert, würde die Gesamtmasse der Sonne innerhalb von 4000 Jahren verbraucht: $Q = 3 \cdot 10^7$ Ws/kg $\cdot 2 \cdot 10^{30}$ kg; $t = Q/L = 1.5 \cdot 10^{11}$ s \approx 4000 Jahre

2.4 Vor-Hauptreihen-Entwicklung der Sonne

Wir haben weiter oben die allererste Phase der Sternentwicklung besprochen, den Kollaps einer interstellaren Wolke. Die Details, die zur Fragmentation und damit zur Sternbildung führen sind nicht bekannt.

Nach der Fragmentierung, die zur Bildung von einzelnen Sternen führt, beträgt die Dichte rund $10^{-17} \text{ kg m}^{-3}$. Diese Wolke ist aber noch nicht im hydrostatischen Gleichgewicht, d.h. der Kollaps geht weiter. Das Gas ist zunächst noch kalt (300 K), und bei zunehmender Dichte bildet sich molekularer Wasserstoff. Die andauernde Kontraktion führt zur Temperaturerhöhung, diese wiederum zur Dissoziation des Wasserstoffs und später auch zu der von Helium. Nach vollständiger Ionisation steigt die Temperatur weiter an, bis hydrostatisches Gleichgewicht erreicht ist: ein Protostern ist entstanden. Die maßgebliche Zeitskala für die Protosternbildung ist wiederum die Frei-Fall-Zeit. Die charakteristische Zeit für diesen Prozeß beträgt $\tau_{ff} \approx 10^{12} \text{ s}$, das entspricht 1 Million Jahre (vgl. Abb. 2).

Als Protostern bezeichnet man eine Gaskugel im hydrostatischen Gleichgewicht, die langsam kontrahiert, dabei strahlt und sich aufheizt. Zu Beginn dieser Phase hatte die Sonne eine Oberflächentemperatur von rund 3000 K, war etwa viermal so groß wie heute und entsprechend eine wesentlich höhere Leuchtkraft. Die weitere Entwicklung des Protosterns geschieht dann gemäß der Kelvin-Helmholtz-Zeit. Im Hertzsprung-Russell-Diagramm bewegt sich die Sonne dann entlang der sog. Hayashi-Linie¹¹ zur Hauptreihe hin. Der Radius nimmt ab, dabei gewinnt die Sonne soviel an innerer Energie, wie abgestrahlt wird (Virialsatz, s. Abschn. 2.5.3) die Temperatur nimmt dabei zu, solange, bis die Zentraltemperatur zur Zündung des Wasserstoffbrennens ausreicht: nun hat die Sonne die *Ur-Hauptreihe* (Zero Age Main Sequence, ZAMS) erreicht. Die Dauer dieser Phase beträgt entsprechend Abschnitt 2.3.1 wiederum rund 30 Millionen Jahre.

¹¹Die Hayashi-Linie ist der Bereich der voll konvektiven Sterne im Hertzsprung-Russell-Diagramm.

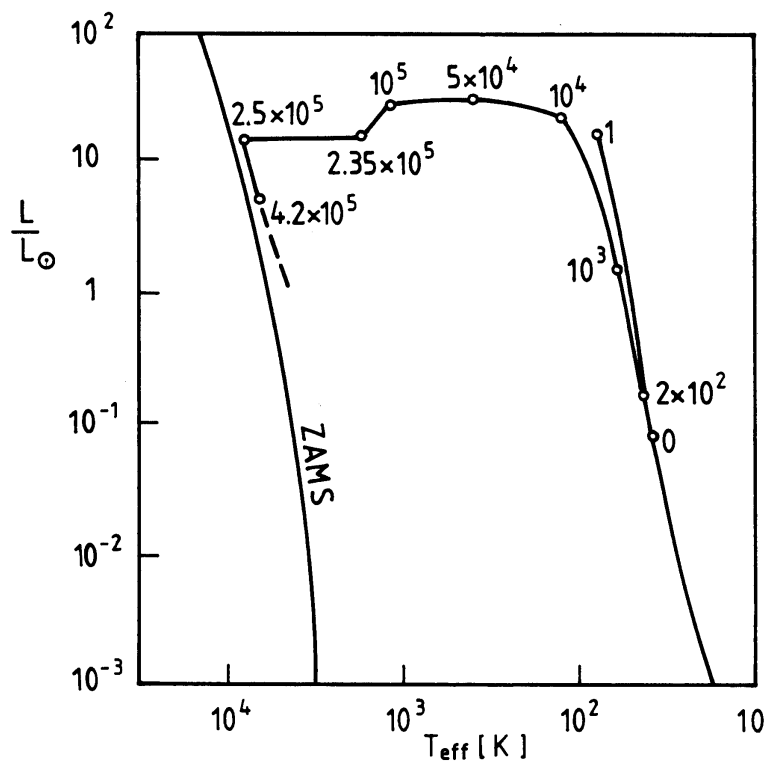


Abbildung 2: Hertzsprung-Russell-Diagramm der Protostern-Entwicklung der Sonne. Zahlen neben der Kurve geben die Zeit in Jahren an, seit Erreichen des hydrostatischen Gleichgewichts. Die Kurve zeigt die Entwicklung hin zur Hauptreihe (aus: Stix, 2002)

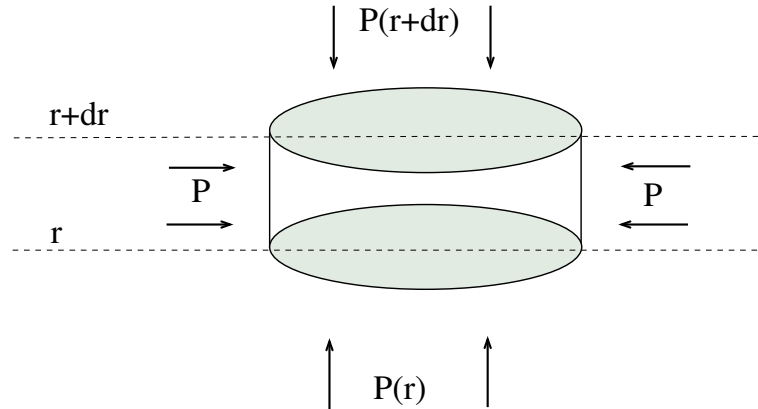


Abbildung 3: Zylindrisches Massenelement zwischen Radien r und $r + dr$

2.5 Grundgleichungen der Sternentwicklung

2.5.1 Erhaltungssätze

Massenerhaltung Bei einer Kugel gilt für die Massenänderung mit zunehmendem Radius r (Massenschale)

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi\rho r^2 \quad (27)$$

Anstelle des Radius r ist es im vorliegenden Fall zweckmäßig, die Masse als unabhängige Variable einzuführen. Dadurch ist die Massenerhaltung automatisch gegeben. Für die Entwicklungsrechnungen hat man den zusätzlichen Vorteil, dass die Gesamtmasse von vornherein bekannt ist, und sich während der Entwicklung praktisch nicht ändert (vgl. Abschn. 1.2.3). Die Randbedingungen für die zu lösenden Differentialgleichungen werden bei $m = m_{\odot}$ angebracht. Im Gegensatz dazu ist der Sonnenradius r_S nicht bekannt (außer für die heutige Sonne), und er kann sich während der Entwicklung stark ändern. Mit der Masse m als unabhängige Variable, erhält Gl. 27 dann die Form

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi\rho r^2} \quad (28)$$

Impulserhaltung Die Newtonsche Bewegungsgleichung sagt aus, dass die Kraft, die auf ein Massenelement wirkt, zu einer Beschleunigung führt, deren Betrag durch den Quotienten aus Kraft und Masse gegeben ist. Betrachtet man ein Volumenelement im Inneren der Sonne, zwischen den Radien r und $r+dr$, und der Fläche dA (Abb. 3), dann ist seine Masse Δm gegeben durch

$$\Delta m = \rho dr dA \quad (29)$$

Die darauf wirkenden Kräfte sind (i) die Gravitationskraft, die durch die Masse innerhalb der Kugel vom Radius r ausgeübt wird (die Gravitationskraft für die außerhalb der

Radius r befindliche Masse hat keinen Netto-Beitrag), und (ii) die Druckkräfte durch das umgebende Gas. Die Gravitation wirkt radial in Richtung des Sonnenzentrums. Aus Symmetriegründen heben sich die seitlichen Druckkräfte auf, und nur die Druckdifferenz zwischen der Oberseite und der Unterseite geht in die Bewegungsgleichung ein. Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{r}\Delta m = -\frac{Gm\Delta m}{r^2} + P(r)dA - P(r+dr)dA. \quad (30)$$

Mit $P(r+dr) = P(r) + (\partial P/\partial r)dr$, sowie Gl. 29 lautet Gl. 30

$$\ddot{r}\Delta m = \frac{Gm\Delta m}{r^2} - \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\Delta m}{\rho} \quad (31)$$

Das Massenelement kann man herauskürzen, und die Bewegungsgleichung dann unter Verwendung von Gl. 27 mit der Masse m als unabhängiger Variable formulieren:

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m} \quad (32)$$

Beschleunigungen können bei der Beschreibung des Sternaufbaus im Allgemeinen vernachlässigt werden, und die Bewegungsgleichung vereinfacht sich zum **hydrostatischen Gleichgewicht**:

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (33)$$

Mit $g=Gm/r^2$ und r als unabhängiger Variable erhält man die klassische Form von Gl. 33:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho g \quad (34)$$

Die rechte Seite von Gl. 33 ist immer negativ, daraus folgt, dass der Druck nach außen abnehmen muss. Im Sonnenzentrum wird der Druckgradient Null.

Wir können den Druck im Zentrum der Sonne abschätzen, indem wir Gl. 33 von $m=0$ bis $m=M$ integrieren:

$$P(M) - P(0) = -\int_0^M \frac{Gm}{4\pi r^4} dm \quad (35)$$

Auf der linken Seite setzen wir $P(M)=0$, was für die Sonnenoberfläche eine gute Näherung darstellt. Für die rechte Seite erhalten wir eine untere Grenze, indem wir für r den Sonnenradius R_S einsetzen. Dann erhalten wir für das Sonnenzentrum¹²

$$P(0) > \int_0^M \frac{Gm}{4\pi R_S^4} dm = \frac{GM^2}{8\pi R^4} = 4.4 \cdot 10^{13} Nm^{-2}. \quad (36)$$

Energiebilanz In allgemeiner Form lautet die Energiebilanz der Sonne

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \epsilon - T \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (37)$$

$L(m)$ bezeichnet die Leuchtkraft, die innerhalb einer Kugel der Masse m erzeugt wird, ϵ ist die Energieerzeugung pro Masseneinheit und S ist die spezifische Entropie. Der zweite Term auf der rechten Seite beschreibt mögliche Leuchtkraftänderungen durch Aufheizung oder Abkühlung. Während der Hauptreihenentwicklung der Sonne kann dieser Term im Vergleich zur nuklearen Energieerzeugung ϵ vernachlässigt werden.

Lokales thermodynamisches Gleichgewicht Ist die *mittlere freie Weglänge* von Teilchen, d.h. die von Teilchen zwischen zwei Stößen durchlaufene Strecke viel kürzer als die Abmessungen eines Systems von Teilchen, dann wird *lokales thermodynamisches Gleichgewicht*, *LTE* erreicht, und das System kann an verschiedenen Orten unterschiedliche Temperatur annehmen. Mit "Teilchen" sind hier auch die Photonen gemeint, mit Elektronen als Stoßpartner. Im LTE strahlt ein Körper als *Schwarzer Strahler*, d.h. die Energieverteilung folgt der Kirchhoff-Planck-Funktion, die Strahlungstemperatur ist gleich der Gastemperatur¹³.

Bei Sternen gilt darüberhinaus, dass die *mittlere freie Zeit*, d.h. die Zeit zwischen zwei Stößen, viel kürzer ist als die typischen Zeitskalen für makroskopische Änderungen, dann gilt (lokales) thermodynamisches Gleichgewicht, darüberhinaus kann sich die Temperaturverteilung mit der Zeit ändern.

2.5.2 Energietransport

Der Energiefluss F ist definiert als Leuchtkraft (Strahlungsleistung) pro Flächeneinheit. Im Inneren eines Sterns wird Energie entweder durch Strahlung oder durch Konvektion transportiert:

$$F = F_R + F_C = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (38)$$

Die Strahlungstransportgleichung Das Strahlungsfeld (die Strahlungstransportgleichung) einer planparallelen Atmosphäre wird beschrieben durch:

$$dI_\nu(r, \theta) = \rho \left(I_\nu(r, \theta) \kappa_\nu \frac{dr}{\cos \theta} - S_\nu(r) \kappa_\nu \frac{dr}{\cos \theta} \right)$$

θ : ist der Winkel der Sichtlinie relativ zur Vertikalen der planparallelen Atmosphäre, s. Abb. 2.5.2.

Im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht kann man die Quellfunktion S durch die Kirchhoff-Planck-Funktion ersetzen:

$$S_\nu(r) = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$\cos \theta \frac{dI_\nu(r)}{dr} = -\kappa \rho (I_\nu - B_\nu). \quad (39)$$

¹³Dies ist nicht immer der Fall: die Strahlungstemperatur der Sonne an der Erdoberfläche beträgt 6000 K, während die Gastemperatur der durchstrahlten Erdatmosphäre 300 K beträgt.

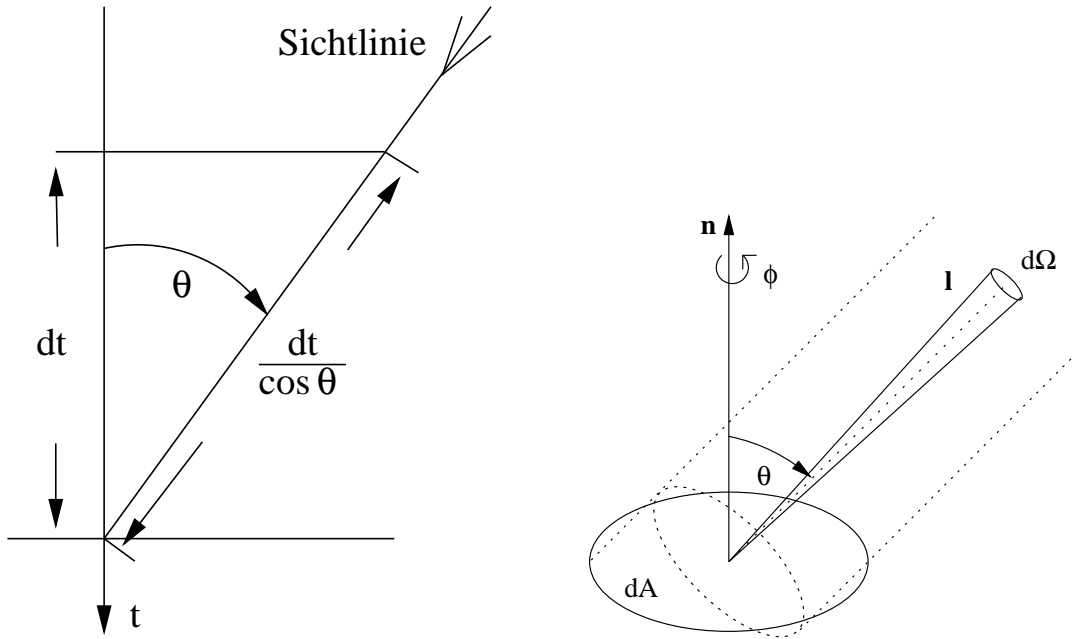


Abbildung 4: Definition des Sichtwinkels θ und der Intensität

I_ν und κ_ν sind die Intensität und der Absorptionskoeffizient bei der Frequenz ν .

Wir können natürlich nicht $I=B$ setzen, weil ein völlig isotropes Strahlungsfeld keine Energie transportiert. Statt dessen verwenden wir die Entwicklung

$$I_\nu = B_\nu - \frac{\cos \theta}{\kappa_\nu \rho} \frac{dB_\nu}{dr}, \quad (40)$$

welche die Gl. 39 bis auf einen Faktor $\cos^2 \theta$ erfüllt. Dieser Faktor trägt aber nicht zum Fluss bei.¹⁴ Der Gesamtfluss ist gegeben durch

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu. \quad (41)$$

F_ν ist das Integral der Intensität über den Raumwinkel Ω :

$$F_\nu = \int I \cos \theta d\Omega = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu \rho} \frac{dB_\nu}{dr} = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu \rho} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dr}. \quad (42)$$

Setzt man $F_C=0$, und kombiniert die Gleichungen 38, 41, 42, erhält man:

$$F = -\frac{4\pi}{3\rho} \frac{dT}{dr} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu = -\frac{4\pi}{3\rho} \frac{dT}{dr} \int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} \quad (43)$$

Der Quotient

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} \quad (44)$$

¹⁴Einsetzen von Gl. 40 in Gl. 39; Integration über Raumwinkel.

in Gl. 43 definiert die Opazität (auch Rosselandscher Absorptionskoeffizient genannt) als harmonisches Mittel von κ_ν (Mittelwert von $1/\kappa_\nu$).¹⁵

Das Integral $\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu$ ergibt $4\sigma T^3/\pi$.¹⁶ Damit vereinfacht sich Gl. 43 zu

$$F = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr}. \quad (45)$$

Mit $L = 4\pi r^2 F$, sowie der Masse m als unabhängiger Variable (Gl. 28) ergibt sich für den Temperaturgradienten

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{3\kappa L}{256\pi^2\sigma r^4 T^3}. \quad (46)$$

Die Gleichungen 46 oder 45 gelten nur in Bereichen, die stabil geschichtet sind, d.h. in denen es keine Konvektion gibt. Konvektion ist ein sehr effektiver Mechanismus für den Energietransport. Sie tritt ein, wenn das Schwarzschild-Kriterium für Stabilität nicht erfüllt ist:

$$\frac{dT}{dr} < \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} \quad (47)$$

Der Index ad steht für adiabatisch.

In konvektiv stabilen Bereichen kommt außer Strahlung noch Wärmeleitung durch freie Elektronen als Transportmechanismus in Frage. Formal kann man diesen (im Sonnenzentrum kleinen) Beitrag bei der Definition der Opazität berücksichtigen, indem man das harmonische Mittel aus der reinen Strahlungsopazität und dem Beitrag durch Elektronenleitung bildet:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_{rad}} + \frac{1}{\kappa_e} \quad (48)$$

Das harmonische Mittel sagt aus, dass am meisten Energie dort transportiert wird, wo die Materie am durchsichtigsten ist.

2.5.3 Virialsatz

Der Virialsatz verknüpft die potentielle Energie eines Systems im hydrostatischen Gleichgewicht mit der inneren Energie, bzw. der kinetischen Energie bei einem System von freien Teilchen. Der Virialsatz ist von großer Bedeutung für die Entwicklung und Struktur von Sternen und Sternsystemen. Er wurde von Clausius (der die Entropie eingeführt hat) im Jahr 1870 formuliert:

Für ein abgeschlossenes System von Massenpunkten, die nur gravitativ wechselwirken, und die als ideales Gas betrachtet werden können, ist die mittlere kinetische Energie (allgemein: die innere Energie) dem Betrag nach doppelt so groß wie die mittlere potentielle Energie:

$$U := \overline{E_{kin}} = -0.5 \overline{E_{pot}} := -0.5 \overline{\Omega} \quad (49)$$

¹⁵Def. *Harmonisches Mittel* A eines Satzes von pos. Zahlen a_i , $i=1,N$: $1/A := 1/N \cdot \sum_i 1/a_i$. Beispiel: Mittl. Geschwindigkeit v , wenn gleichgroße Teilstrecken mit unterschiedl. Geschwindigkeiten v_1 und v_2 durchfahren wurden: $1/v = 1/2(1/v_1 + 1/v_2)$.

¹⁶ $\int dB_\nu/dT d\nu = d/dT \int B_\nu d\nu = d/dT \cdot I = d/dT \cdot F/\pi = d/dT \sigma/\pi T^4 = 4\sigma/\pi T^3$

Der Energiesatz fordert zudem

$$U + \Omega = E = \text{const.} \quad (50)$$

A) Betrachten wir zunächst einen Spezialfall: Massenpunkt mit Zentralkraft auf Kreisbahn

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$$

$$F_Z = F_G \implies \frac{mv_0^2}{r} = \frac{GmM_0}{r^2}$$

daraus folgt

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GmM}{r} = -\frac{1}{2}\Omega$$

B) Für die Herleitung des Virialsatzes betrachten wir ein abgeschlossenes System von Massenpunkten, und bilden

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{p}_k \vec{r}_k = \sum \frac{d\vec{p}_k}{dt} \vec{r}_k + \sum \vec{p}_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_k}{dt} \vec{r}_k + \sum \vec{p}_k \vec{v}_k$$

Mit $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ und $\vec{p} = m\vec{v}$ folgt

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{p}_k \vec{r}_k = \sum \vec{F}_k \vec{r}_k + 2E_{kin} \quad (51)$$

Bei zeitlicher Mittelung verschwindet die linke Seite der Gl. 51 und man erhält

$$E_{kin} = -\frac{1}{2} \sum \vec{F}_k \vec{r}_k. \quad (52)$$

Die Summe auf der rechten Seite wird *Virial* genannt.

C) Betrachten wir nun ein Teilchen im Zentralpotential $\phi \sim r^{n+1}$ und der Zentralkraft $F \sim r^n \sim d\phi/dr$. Im Gravitationsfeld ($n = -2$) gilt $\Omega = m\phi$ und $F = -md\phi/dr$. Daraus folgt für das Virial:

$$\overline{\sum \vec{F} \vec{r}} = -mr \frac{d\phi}{dr} = -m(n+1)\phi = (n+1)E_{pot}. \quad (53)$$

Das zweite Gleichheitszeichen folgt aus: $\phi = mr^{n+1} = d\phi/dr = (n+1)r^n$. Mit $n=-2$ folgt aus den Gln. 52 und 53 der Virialsatz (Gl. 49).

Abschätzung der Zentraltemperatur Mit Hilfe des Virialsatzes können wir nun die mittlere Temperatur im Inneren der Sonne abschätzen, wobei wir die Sternmaterie als ideales Gas betrachten. Die potentielle Energie eines Sterns der Masse M mit Radius R beträgt

$$\Omega = E_{grav} = -\alpha \frac{GM^2}{R}, \quad (54)$$

wobei der Faktor α von der Größenordnung 1 ist, und vom Dichteprofil abhängt.¹⁷ Für ein ideales Gas beträgt die kinetische Energie pro Teilchen $3/2 kT$, damit beträgt die innere Energie pro Masseneinheit (mit der Teilchenmasse m_g) $u = 3kT/2m_g$. Die gesamte innere Energie erhält man durch Integration:

$$U = \int_0^M \frac{3kT}{2m_g} dm = \frac{3k}{2m_g} \bar{T} M, \quad (55)$$

mit der über den Stern gemittelten Temperatur \bar{T} . Mit dem Virialsatz ($U = -0.5\Omega$) folgt aus Gl. 55

$$\bar{T} = \frac{\alpha m_g GM}{3kR}. \quad (56)$$

Hieraus erhält man eine mittlere Temperatur von der Größenordnung 10 Millionen Grad.

Was passiert bei der Kontraktion? Bei einem Stern, der sowohl im thermischen wie im hydrostatischen Gleichgewicht ist, gilt der Virialsatz, d.h. nicht nur die Gesamtenergie $E = \Omega + U$ ist konstant, sondern auch die beiden Summanden. So kann ein Stern nicht gleichzeitig abkühlen und expandieren. Ein Stern hat gewissermaßen eine negative Wärmekapazität: er wird wärmer, während er Energie abgibt! Dies folgt direkt aus dem Virialsatz für ein ideales Gas:

$$E = U + \Omega = \frac{1}{2}\Omega = -U. \quad (57)$$

Wenn $\dot{E} < 0$ ist, dann muss die innere Energie U zunehmen. Dies bedeutet, dass die Temperatur zunehmen muss (s. Gl. 56). Die potentielle Energie Ω muss gleichzeitig abnehmen, d.h. der Stern kontrahiert. Dies bedeutet, dass die potentielle Energie, die bei der Kontraktion des Sterns freigesetzt wird, zu gleichen Teilen in die Abstrahlung (d.h. den Energieverlust \dot{E}) und die Aufheizung geht: der Stern strahlt und wird dabei heißer!

Eine weitere Konsequenz aus dem Virialsatz ist die Stabilität des Sterns während der Fusion im Zentrum: die Zufuhr von Energie führt zum Aufblähen, dies führt aber wegen der damit verbundenen Abnahme von U zur Abkühlung und damit zur Reduktion der Fusionsrate.

2.5.4 Änderung der Zusammensetzung

Die Sonne besteht im Wesentlichen aus freien Elektronen und Atomkernen (zumeist Wasserstoffkerne, d.h. Protonen). Die Änderungen der Zusammensetzung sind daher keine chemischen Prozesse (die sich ausschließlich in der Elektronenhülle von Atomen abspielen), sondern Kernreaktionen. Bei Kernreaktionen sind die Baryonenzahl (p, n) und die Leptonenzahl (e, ν) Erhaltungsgrößen.

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Änderung der Zusammensetzung auf generische Weise, d.h. ohne Kenntnis der nuklearen Prozesse. Diese werden weiter unten (Abschn.2.7)

¹⁷Homogene Kugel: $d\Omega = -GM(r)dM(r)dr$. Wegen $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$ und $M(r) = 4/3\pi r^3 \rho_0$ gilt: $\Omega = -G \int_0^{R_\odot} GM(r)dM(r) = -3/5 GM^2/R_\odot$.

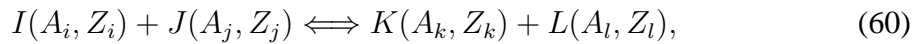
behandelt. Betrachten wir einen Stern der Dichte ρ und der Partialdichte ρ_i der Nukleo-
 enart i , dann beträgt der Massenanteil dieser Spezies

$$X_i = \frac{\rho_i}{\rho}. \quad (58)$$

Der Anzahl-dichte, d.h. die Nukleonenzahl pro Volumeneinheit, ist dann gegeben durch
 die Partialdichte dividiert durch entsprechende Nukleon-masse:

$$n_i = \frac{\rho_i}{A_i m_H}. \quad (59)$$

A_i ist die Baryonenzahl und m_H die Masse eines Wasserstoffkerns. Letzere wird meist
 definiert als ein Zwölftel der Masse eines Kohlenstoffkerns. Man kann nun die Reaktion
 von zwei Kernen in Form einer Reaktionsgleichung beschreiben, bei der aus zwei Aus-
 gangskernen $I(A_i, Z_i)$ und $J(A_j, Z_j)$ zwei Reaktionsprodukte entstehen, $K(A_k, Z_k)$ und
 $L(A_l, Z_l)$.



wobei die Nukleonenzahl und die Ladungszahl erhalten sind:

$$A_i + A_j = A_k + A_l, \quad Z_i + Z_j = Z_k + Z_l. \quad (61)$$

Die Änderungsrate des Elements i aufgrund von Kernreaktionen (Bildung und Zerstörung)
 kann man allgemein in folgender Form beschreiben¹⁸

$$\dot{n}_i = -n_i \sum_{j,k} \frac{n_j}{1 + \delta_{ij}} R_{ijk} + \sum_{l,k} \frac{n_l n_k}{1 + \delta_{lk}} R_{jki} \quad (62)$$

Hierbei sind die $R_{ijk} := \zeta \cdot v$ die Reaktionsraten, die vom Wirkungsquerschnitt ζ des be-
 trachteten Kerns und von der (thermischen) Geschwindigkeit v der Stoßpartner abhängen.
 Die Änderung der Massenanteile lautet für jede Spezies

$$\dot{X}_i = \frac{A_i \rho}{m_H} \left(-\frac{X_i}{A_i} \sum_{j,k} \frac{X_j R_{ijk}}{A_j (1 + \delta_{ij})} + \sum_{l,k} \frac{X_l X_k R_{lki}}{A_l A_k (1 + \delta_{lk})} \right) \quad (63)$$

Führt man einen Vektor ein, der die Zusammensetzung beschreibt, $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$,
 kann man die Änderungen aller Elemente in Kurzform beschreiben,

$$\dot{\vec{X}} = \mathbf{f}(\rho, T, \mathbf{X}) \quad (64)$$

wobei \mathbf{f} von der Form der Gl. 63 ist.

¹⁸Reagieren zwei gleiche Sorten ($i=j$) miteinander, wird das Produkt $n_i \cdot n_j$ ersetzt durch $n_i^2/(1+\delta_{ij}) = 1/2 \cdot n_i^2$.

2.5.5 Diffusion im Sonneninneren

In der Strahlungszone der Sonne, innerhalb $r = 0.7 \cdot r_{\odot}$, findet keine Durchmischung der Elemente statt, so dass die Zusammensetzung überall gleich bleibt, abgesehen von den thermonuklearen Umwandlungen. Die Schwerkraft führt zu einer Sedimentierung der schweren Elemente, während die leichten Elemente (H) tendenziell nach außen wandern. Dieser Sedimentierungsprozess ist extrem langsam, mit einer charakteristischen Zeit von 10^{13} Jahren, und bewirkt daher nur eine minimale Änderung der chemischen Zusammensetzung im Inneren der heutigen Sonne.

Neben der Diffusion durch Schwerkraft gibt es noch die thermische Diffusion. Sie wird getrieben durch den Temperaturgradienten: Teilchen, die von der heißeren Seite (innen) kommen, haben eine etwas höhere Geschwindigkeit als diejenigen, die von außen kommen. Dies bedeutet, dass die leichteren Teilchen (Wasserstoff) stärker nach außen getrieben werden als die schwereren He-Kerne. Auch dieser Vorgang ist extrem langsam, mit einer Zeitskala von 10^{13} Jahren.

Die Helioseismologie liefert heute sehr genaue Resultate über das Innere der Sonne, z.B. die Schallgeschwindigkeit. Es ist daher angemessen, die kleinen Beiträge der Diffusion in den Rechnungen zum inneren Aufbau der Sonne zu berücksichtigen. Auch für die Bestimmung der Neutrino-Flüsse der verschiedenen Kernreaktionen ist der genaue Helium-Anteil wichtig. Durch die Berücksichtigung der Diffusion ändert sich die Zusammensetzung der Sonne in den äußeren Schichten von $Y=0.278$ auf $Y=0.245$, mit einer Zunahme im Kern von $Y_c = 0.631$ auf $Y_c = 0.642$. Man kann zeigen, dass 2/3 der Helium-Sedimentierung auf den Schwerkraft-Einfluss entfallen und 1/3 auf den Temperaturgradienten.

2.5.6 Zusammenfassung der Gleichungen der Sternentwicklung

Die Gleichungen 28, 32, 37, 46 bilden ein System von partiellen Differentialgleichungen für die Entwicklung eines Sterns. Die Masse m ist die unabhängige Variable, und die Gleichungen beschreiben die Gradienten von r , P , T und L .

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi\rho r^2} \quad (65)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \ddot{r} \quad (66)$$

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \epsilon - T \frac{\partial S}{\partial t} \quad (67)$$

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{3\kappa L}{256\pi^2\sigma r^4 T^3} \quad (68)$$

Dazu kommen noch Beziehungen für die verbleibenden Unbekannten, ρ , S , κ , und ϵ . Sie werden in den folgenden Abschnitten diskutiert.

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(P, T) \\ dS &= dS(P, T) \\ \epsilon &= \epsilon(P, T) \\ \kappa &= \kappa(P, T) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen berühren ganz unterschiedliche Disziplinen der Physik: Thermodynamik, statistische Physik, Atomphysik, Elementarteilchenphysik. Dabei wird ein Objekt mit durchaus astronomischen Dimensionen behandelt: die Sonne. Bei der Theorie der Sternentwicklung werden auf einzigartige Weise die genannten, scheinbar getrennten, Arbeitsgebiete der Physik erfolgreich miteinander verknüpft.

2.5.7 Zustandsgleichung

Als Zustandsgleichung eines Gases bezeichnet man eine Beziehung zwischen dem Druck, der Dichte und der Temperatur $P=P(\rho, T, X)$. Zunächst überprüfen wir, ob die Sternmaterie die schon erwähnte Bedingung des *Idealen Gases* erfüllt. Bei den im Sterninneren vorherrschenden Temperaturen sind die Atome ionisiert, und es können elektrostatische Wechselwirkungen auftreten. Um deren Beitrag zu ermitteln, vergleichen wir die Coulomb-Energie eines Teilchens mit seiner kinetischen Energie. Bei gegebener Dichte $\bar{\rho}$ und der Teilchenmasse $\mathcal{A}m_H$ (ausgedrückt in Einheiten des Wasserstoffatoms) erhalten wir für den mittleren Abstand zwischen zwei Teilchen

Coulomb-Wechselwirkung

$$d = \left(\frac{\mathcal{A}m_H}{\bar{\rho}} \right)^{1/3} = \left(\frac{4\pi\mathcal{A}m_H}{3M} \right)^{1/3}. \quad (69)$$

Die Coulomb-Energie eines Teilchen der Ladung $\mathcal{Z}e$ kann man abschätzen zu

$$\epsilon_C \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{Z}^2 e^2}{d}. \quad (70)$$

Für das Verhältnis von kinetischer Energie ($\approx kT$) und Coulomb-Energie erhalten wir

$$\frac{\epsilon_C}{kT} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{Z}^2 e^2}{\mathcal{A}^{4/3} m_H^{4/3} G M^{2/3}}. \quad (71)$$

Hierbei haben wir die mittlere Temperatur aus Gl. 56 eingesetzt. Für die Sonne erhält man einen Wert von 0.01, so dass man die Coulomb-Wechselwirkung (zunächst) vernachlässigen kann.

Der Druck eines Systems von freien Teilchen kann allgemein aus dem Druckintegral berechnet werden:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty v p n(p) dp, \quad (72)$$

mit der Geschwindigkeit v und dem Impuls p . Die Anzahl von Teilchen pro Volumeneinheit im Impulsintervall $(p, p + dp)$ ist durch $n(p)dp$ gegeben. (Beweis: Prialnik, 2000, Kap. 3).

Der Gasdruck setzt sich zusammen aus dem Ionendruck und dem Elektronendruck

$$P_{gas} = P_I + P_e, \quad (73)$$

die wir zunächst getrennt bestimmen.

Ionendruck Die Ionen betrachten wir als freies Teilchengas im thermodynamischen Gleichgewicht. Dann gehorchen sie einer Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung

$$n(p)dp = \frac{4\pi n_I p^2}{(2\pi m_I kT)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2m_I kT}}, \quad (74)$$

und man erhält aus Gl. 72, mit der Ionenanzahl pro Volumeneinheit n_I die bekannte Beziehung

$$P_I = n_I kT. \quad (75)$$

Die Gesamtzahl von Ionen pro Volumeneinheit beträgt (vgl. Abschn. 2.5.4)

$$n_I = \sum_i n_i = \sum_i \frac{\rho X_i}{m_H \mathcal{A}_i}. \quad (76)$$

Das mittlere Molekulargewicht des stellaren Materials wird aus Häufigkeit der chem. Elemente bestimmt zu

$$\frac{1}{\mu_I} \equiv \sum_i \frac{X_i}{\mathcal{A}_i}. \quad (77)$$

Daraus erhält man die Teilchenzahl zu

$$n_i = \frac{\rho}{\mu_I m_H}. \quad (78)$$

Das mittlere Molekulargewicht μ_I schätzen wir ab, indem wir für die schweren Elemente (alles aus H und He) eine mittlere Baryonenzahl $\langle \mathcal{A} \rangle$ ansetzen. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{\mu_I} \approx X + \frac{Y}{4} + \frac{1 - X - Y}{\langle \mathcal{A} \rangle}. \quad (79)$$

Für die Sonne haben wir $X=0.707$, $Y = 0.274$ und $\langle \mathcal{A} \rangle = 20$. Daraus folgt $m\mu_I = 1.29$. Nun setzen wir Gl. 78 in Gl. 75 ein, und erhalten, unter Verwendung der Gaskonstante $\mathcal{R} \equiv k/m_H$

$$P_I = \frac{\mathcal{R}}{\mu_I} \rho T. \quad (80)$$

Elektronendruck Die Bestimmung des Elektronendrucks erfolgt analog zum vorigen Abschnitt, wiederum unter der Annahme, dass die Elektronen ein ideales Gas sind. Weiterhin nehmen wir zur Vereinfachung an, dass die Atome vollständig ionisiert sind. Dies gilt auf jeden Fall bei Temperaturen oberhalb 10^6 K für Wasserstoff und Helium, d.h. im Sterninneren. Der Massenanteil der äußeren Schichten der Sonne ist aber sehr klein. Die Zustandsgleichung lautet

$$P_e = n_e k T. \quad (81)$$

Die Gesamtzahl von Elektronen pro Volumeneinheit beträgt (vgl. Abschn. 2.5.4)

$$n_e = \sum_i Z_i n_i = \frac{\rho}{m_H} \sum_i \frac{X_i Z_i}{m_H \mathcal{A}_i}. \quad (82)$$

Wir definieren die mittlere Anzahl freier Elektronen pro Nukleon μ_e als

$$\frac{1}{\mu_e} \equiv \sum_i \frac{X_i Z_i}{\mathcal{A}_i}. \quad (83)$$

Daraus erhält man die Elektronenzahl zu

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H}. \quad (84)$$

Die μ_e schätzen wir ab, indem wir für die schweren Elemente ("Metalle") als mittleres Verhältnis von Ladungszahl zu Baryonenzahl annehmen

$$\left\langle \frac{Z}{\mathcal{A}} \right\rangle = 1/2 \quad (85)$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\mu_e} \approx X + \frac{Y}{2} + (1 - X - Y) \left\langle \frac{Z}{A} \right\rangle \approx \frac{1 + X}{2}. \quad (86)$$

Daraus ergibt sich ein Wert von $\mu_e = 1.17$, und der Elektronendruck beträgt

$$P_e = \frac{\mathcal{R}}{\mu_e} \rho T. \quad (87)$$

Gasdruck Der Gasdruck folgt nun aus den Gln. 80 und 87 zu

$$P_{gas} = P_I + P_e = \left(\frac{1}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_e} \right) \mathcal{R} \rho T = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T, \quad (88)$$

mit dem mittleren Molekulargewicht

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_e} = \frac{1}{0.613}. \quad (89)$$

Teilweise Entartung des Elektronengases Bisher haben wir Quanteneffekte vernachlässigen können, beim Elektronendruck müssen sie aber berücksichtigt werden, weil mit zunehmender Dichte die Heisenberg-Relation wichtig wird, wonach maximal 2 Elektronen im Phasenraumvolumen $V \Delta^3 p$ sein können:

$$V \Delta^3 p \geq h^3. \quad (90)$$

Das Phasenraumvolumen für Elektronen, die einen Impuls zw. p und $p + dp$ haben, beträgt $4 \pi p^2 dp V$. Mit zunehmender Dichte schrumpft das Volumen V , und um der Heisenbergschen Relation zu genügen, muss irgendwann der Impuls größer werden, als von der Maxwell-Verteilung gegeben. Dies bedeutet, dass der Druck größer wird. Bei vollständiger Entartung wird der Druck unabhängig von der Temperatur und man erhält

$$n(p) dp = \frac{2}{V} = \frac{2}{h^3} 4 \pi p^2 dp. \quad (91)$$

Tatsächlich ist die Entartung unter solaren Bedingungen nicht vollständig sondern nur partiell, und damit auch abhängig von der Temperatur. Wir formulieren die teilweise Entartung der Elektronen daher als Abweichung von der Maxwell-Verteilung, indem wir bei der Teilchenzahl $n(p) dp$ (Gl. 74) den letzten Faktor $\exp(-E/kT)$ ersetzen durch

$$\frac{1}{e^{\frac{E}{kT} - \psi} + 1}, \quad (92)$$

mit dem Entartungs-Parameter ψ . Gl. 91 lautet dann

$$n(p) dp = \frac{8 \pi p^2}{h^3 (e^{\frac{E}{kT} - \psi} + 1)} dp. \quad (93)$$

Falls in Gl. 93 der Entartungs-Parameter gegen $-\infty$ geht, dann erhält man wieder die Maxwell-Verteilung (der 2. Summand in der Klammer kann dann gegenüber $e^{E/kT}$ vernachlässigt werden). Für große positive Werte von ψ wird der Exponentialterm insgesamt klein und kann vernachlässigt werden, und damit verschwindet die Temperaturabhängigkeit des Elektronendrucks. Diesen Zustand bezeichnet man als vollständige (nichtrelativistische) Entartung.

Für die kinetische Energie E muss ggfs. die relativistische Form verwendet werden:

$$E = m_e c^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_e c} \right)^2} - 1 \right). \quad (94)$$

Innerhalb von ($r = 0.5 r_\odot$, bzw. bei Drücken oberhalb $P = 10^{15}$ Pa) wird die Druckkorrektur durch Elektronenentartung nennenswert, sie erreicht im Zentrum einen Wert von 1.7 % des Gesamtdrucks.

Der Entartungs-Parameter ist nicht a priori bekannt, er wird zusammen mit der Dichte als Funktion von P und T bestimmt. Man geht hierzu aus von der (bekannten) Elektronendichte bei vollständiger Ionisation, sie beträgt $\rho N_A (1 + X)/2$. N_A ist die Avogadro-Zahl. Dieser Wert muss gleich sein dem Integral über Gl. 91. Damit erhalten wir die erste Gleichung für die unbekanntenen Variablen ρ und ψ :

$$\rho N_A (1 + X)/2 = \int_0^\infty n_e(p) dp. \quad (95)$$

Die zweite Beziehung folgt aus dem Elektronendruck (Gl. 81 und Gl. 88):

$$P_G - P_I = \frac{1}{3} \int_0^\infty p n_e(p) v dp. \quad (96)$$

Strahlungsdruck Der Strahlungsdruck rührt vom Impuls der Photonen her und wird formal auf gleiche Weise wie der Gasdruck aus dem Druckintegral 72 berechnet, wobei $n(\nu)$ durch die Planck-Funktion gegeben ist:

$$n(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (97)$$

Daraus folgt der Strahlungsdruck zu

$$P_{rad} = \frac{1}{3} \int_0^\infty c \frac{h\nu}{c} n(\nu) d\nu = \frac{1}{3} a T^4, \quad (98)$$

mit der Strahlungskonstanten $a=4\sigma/c$. Der Strahlungsdruck ist in der Sonne, außer in Oberflächennähe stets viel kleiner als der Gasdruck. Definiert man einen Parameter β durch

$$P = P_G + P_{rad}, \quad P_{rad} = (1 - \beta)P, \quad (99)$$

dann erhält man aus Modellrechnungen überall in der Sonne Werte unterhalb von 10^{-3} für β .

Beachte: Der Entartungsdruck erhöht zwar den Beitrag der Elektronen zum Gasdruck, ändert aber nicht den Gesamtdruck. Anders formuliert: der Entartungsdruck verringert den Anteil des Gasdrucks am Gesamtdruck. Letzterer folgt direkt aus der Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichts.

2.6 Opazität

Eine wichtige Materialeigenschaft des solaren Gases ist seine Durchlässigkeit für Strahlung. Diese Transparenz (oder umgekehrt die Opazität) ist definiert durch die Strecke, innerhalb derer ein Photon absorbiert wird. Diese Strecke bezeichnet man als *mittlere freie Weglänge* eines Photons. Als gute Maßzahl für die Transparenz bietet sich die *optische Tiefe* τ an, die definiert ist als

$$d\tau = -\kappa\rho dr. \quad (100)$$

Ein Gas hat eine große optische Tiefe, wenn die Opazität hoch ist, oder die Dichte, oder wenn die geometrische Dicke groß ist, bzw. eine Kombination aus allen Beiträgen. Die Opazität ist keine Konstante, sondern hängt ab von der Wellenlänge, von der Teilchensorte, der Dichte und der Temperatur. Im Einzelnen muss die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, mit der ein Photon mit einem Atom oder Elektron wechselwirkt (Streuung oder Absorption), das sind in der Regel aufwändige quantenmechanische Rechnungen. Die wichtigste Wechselwirkung ist die zwischen Photonen und Elektronen:

1. *Elektronenstreuung*: Streuung eines Photons an einem freien Elektron, ohne Änderung der Photonenenergie, auch Thomson-Streuung (im relativist. Fall: Compton-Streuung) genannt. Im Sonneninneren kann klassisch gerechnet werden, und man erhält den Streuquerschnitt als Verhältnis aus emittierter Strahlung und der einlaufenden Energieflussdichte zu

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3}r_0^2, \quad (101)$$

wobei r_0^2 der klassische Elektronenradius ($=e^2/4\pi\epsilon_0m_e c^2 = 2.818 \cdot 10^{-15}$ m) ist.

2. *Photoionisation*: Bei diesem Vorgang wird ein Elektron von einem Atom oder Ion getrennt. Voraussetzung ist, dass die Photonenenergie höher ist als die Ionisationsenergie.
3. *Frei-Frei-Absorption*: Dieser Prozess wird auch *inverse Bremsstrahlung* genannt. In diesem Fall absorbiert ein freies Elektron ein Photon und wird dadurch angeregt. Dies ist (wegen der Erhaltung von Energie und Impuls) nur möglich, wenn das Elektron kurzzeitig mit einem dritten Partner (Atom oder Ion) wechselwirkt. Diese Wechselwirkung ist bei jeder Energie möglich, es gibt daher keine Spektrallinien, sondern ein kontinuierliches Spektrum.
4. *Anregung gebundener Elektronen*: Hier wird ein Photon absorbiert, indem ein Elektron in einen angeregten Zustand übergeht. Die Rückkehr zum Ausgangszustand erfolgt entweder spontan oder infolge eines Stoßes mit einem anderen Atom. Die Anregungsenergie beträgt $h\nu$. In diesem Fall kann man den Stoßquerschnitt in der Form schreiben

$$\sigma_{bb} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f \Phi(\nu), \quad (102)$$

mit der Elektronenmasse m_e , der Oszillatorenstärke f und dem Linienprofil Φ . Das Linienprofil entspricht der Absorptionsbreite, sie kommt zustande

- (a) durch die Dopplerverbreiterung infolge der Geschwindigkeitsverteilung der absorbierenden Atome

$$\Phi_D(\Delta\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} e^{-\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}^2}, \text{ und} \quad (103)$$

- (b) durch Stoßverbreiterung (Lorentz-Profil)

$$\Phi_C(\Delta\nu) = \frac{\gamma}{(2\pi\Delta\nu)^2 + \gamma^2/4}. \quad (104)$$

Die Breite der Linienprofile ist gegeben durch γ (Stoßdämpfungskonstante) und die Dopplerbreite

$$\Delta\nu_D = \sqrt{2\mathcal{R}T/A} \frac{\nu_0}{c}.$$

Für die Bestimmung der Opazität im Sonneninnern ist die Linienbreite sehr wichtig. Da die Opazität ein harmonisches Mittel ist, spielen die kleinen Werte (=große Durchsichtigkeit) die Hauptrolle, das sind die Bereiche zwischen den Absorptionslinien, auch Kontinuumsfenster genannt.¹⁹

Zur Berechnung der Rosseland-Opazität (Gl. 44) müssen die Wirkungsquerschnitte der verschiedenen Prozesse mit der entsprechenden Teilchendichte multipliziert werden, unter Berücksichtigung der auftretenden Übergänge (z. B. Ionisation, d.h. Erhöhung der Elektronenzahl). Diese Dichten werden durch die Boltzmann- und die Saha-Gleichung beschrieben. Die entsprechenden Rechnungen sind sehr komplex und werden u.a. am Los Alamos Scientific Laboratory und am Lawrence Livermore National Laboratory durchgeführt (durchaus nicht nur für astrophysikalische Anwendungen). Die Ergebnisse liegen in Form von Tabellen vor (z.B. OPAL-Tables vom LLNL, sie berücksichtigen die 19 häufigsten Elemente, und umfassen einen Temperaturbereich bis hinab zu 5600 K). Da sich die chemische Zusammensetzung durch die Fusion ändert, benötigt man passende Tabellen als Funktion des Sonnenradius und auch als Funktion des Entwicklungszustandes. Üblicherweise verwendet man einige wenige Tabellen und interpoliert zwischen den einzelnen Werten. Abb. 5 zeigt die Opazität der Sonne als Funktion der Tiefe (bzw. des Drucks).

Mittlere Opazität: Die mittlere Opazität der Sonne beträgt rund $0.1 \text{ m}^2\text{kg}^{-1}$. Da die mittlere Dichte etwa 1000 kg m^{-3} beträgt, ergibt sich eine mittlere freie Weglänge von 0.01 m . Über diese Strecke ändert sich die Temperatur typischerweise um 0.001 K (\bar{T}/r_\odot). Diese Abschätzung zeigt nocheinmal, dass die Strahlung im Sonneninneren praktisch die eines schwarzen Körpers ist. Es gibt eine minimale Abweichung von der Isotropie, und diese ist ausreichend, um den gesamten, der Leuchtkraft entsprechenden Strahlungsfluss, nach außen zu transportieren.

¹⁹'For good transparency, windows must be kept clean.' (Sitx, 2002)

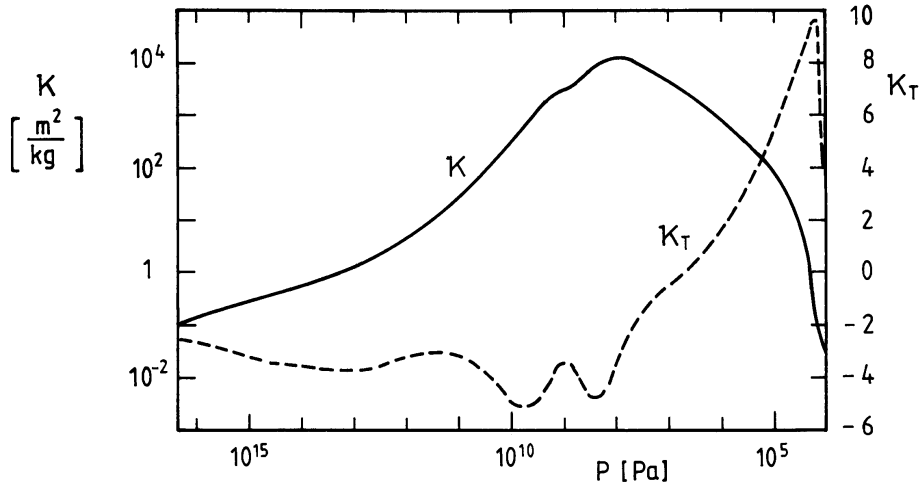
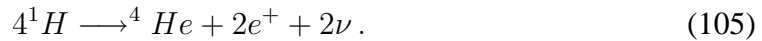


Abbildung 5: Opazität als Funktion der Tiefe (mit dem Druck P als Tiefenkoordinate). Die gestrichelte Kurve zeigt die Ableitung $d(\ln \kappa)/d(\ln T)$. (Quelle: Stix, 2002)

2.7 Nukleare Energieerzeugung

Die wichtigste Energiequelle von Sternen ist die thermonukleare Fusion von Wasserstoff zu Helium:



Die hierbei freiwerdende nukleare Energie kann man aus der Einsteinschen Gleichung

$$\Delta E = \Delta mc^2 \quad (106)$$

berechnen, wenn man die Massendifferenz zwischen den vier Wasserstoffkernen und dem Endprodukt kennt. Die Masse eines Wasserstoffatoms beträgt $1.6736 \cdot 10^{-27}\text{ kg} = 1.0078 \cdot m_H$, die Masse eines Heliumatoms ist $4.0026 m_H$. Hieraus ergibt sich eine Massendifferenz von $0.0287 m_H = 931.49\text{ MeV}/c^2$, oder eine Energiedifferenz von

$$\Delta E(4\ ^1\text{H} \longrightarrow\ ^4\text{He}) = 4.28 \cdot 10^{-12}\text{ J} = 26.732\text{ MeV}. \quad (107)$$

Wir haben hier die Werte für die Atommassen verwendet, anstelle der Kernmassen, weil erstere gut bekannt sind. Die nach Gl. 107 bestimmte Energie teilt sich auf in einen kleinen Teil (0.5 MeV), der von den Neutrinos abtransportiert wird, während der Löwenanteil (26.23 MeV) als Strahlungsenergie freigesetzt ('nutzbar') wird. Die Umwandlung des gesamten Wasserstoffvorrats der Sonne ($0.707 \cdot m_\odot$) ergibt eine Energie von $9 \cdot 10^{44}\text{ J}$, die ausreichen würde, die heutige Leuchtkraft der Sonne über einen Zeitraum von $7.4 \cdot 10^{10}$ aufrecht zu erhalten. Anders ausgedrückt: aus einem kg Wasserstoff wird bei der Fusion eine Energie von $2.58 \cdot 10^{15}\text{ J}$ erzeugt. Wir haben weiter oben (Abschn. 2.5.4) gesehen, dass die Reaktionsrate im Wesentlichen bestimmt ist durch das Produkt aus dem Streuquerschnitt und der Relativgeschwindigkeit v der Reaktionspartner. Die Geschwindigkeit erhalten wir aus der Maxwell'schen Geschwindigkeits-Verteilung

$$n(v)dv \sim e^{-\frac{m_r v^2}{2kT}}, \quad (108)$$

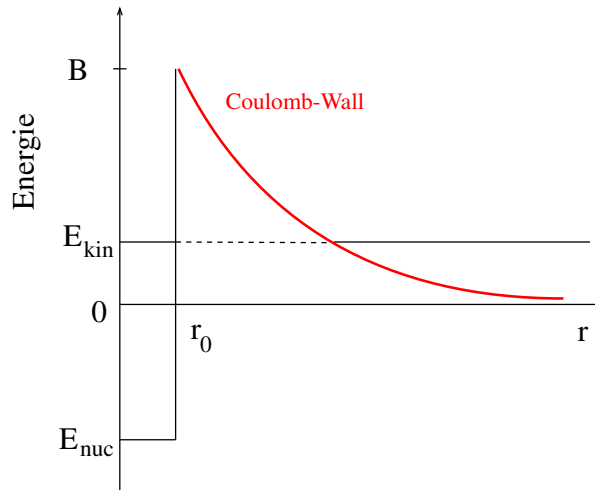


Abbildung 6: Potentialverlauf (schematisch) bei Annäherung von zwei positiv geladenen Teilchen.

mit der reduzierten Masse $m_r (=m_1 m_2 / m_1 + m_2)$.

Damit es zu einer Kernreaktion kommt, müssen die Protonen sich bis zu einem Abstand von $r_0 = 10^{-15}$ m nähern, dazu müssen sie die abstoßende Coulomb-Kraft überwinden. Diese führt zu einer Potentialschwelle der Höhe

$$V(r_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_i Z_j}{r_0} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ eV}. \quad (109)$$

Bei einer Temperatur von 10^7 K beträgt die kinetische Energie der Teilchen ($E_{kin} = mv^2/2 = (3/2)kT$) rund 10 keV (s. Abb. 6. Dieser Unterschied von fast drei Größenordnungen hat im ersten Viertel des 20. Jahrhunderts dazu geführt, dass die Kernfusion im Sterninneren als unmöglich galt, weil die Temperatur bei weitem nicht ausreichend schien.²⁰

Die Lösung kam dann in Form der Quantenmechanik und den Tunneleffekt. Letzterer wurde 1928 von George Gamow²¹ im Zusammenhang mit dem radioaktiven Zerfall entdeckt. Er befasste sich dabei zunächst mit der Frage, warum ein Teilchen die Kernkraft überwinden und sich von einem Atomkern abspalten kann. Gamow schloss dann, dass es auch umgekehrt möglich sein müsste, dass ein positiv geladenes Teilchen die Coulomb-Abstoßung überwinden und in den Einzugsbereich der Kernkräfte gelangen kann. Die Anwendung auf die Energieerzeugung in Sternen folgte sogleich, im Jahr 1929, durch Atkinson und Houtermans.²²

²⁰Eddington schrieb dazu 1926 in seinem Buch *The internal constitution of the stars*: Die Physiker werden schon noch lernen, wie man bei 40 Millionen Grad Wasserstoff in Helium verwandelt!

²¹Gamow gehörte zu der Gruppe von Kernphysikern um Max Born, die in jener Zeit in Göttingen tätig

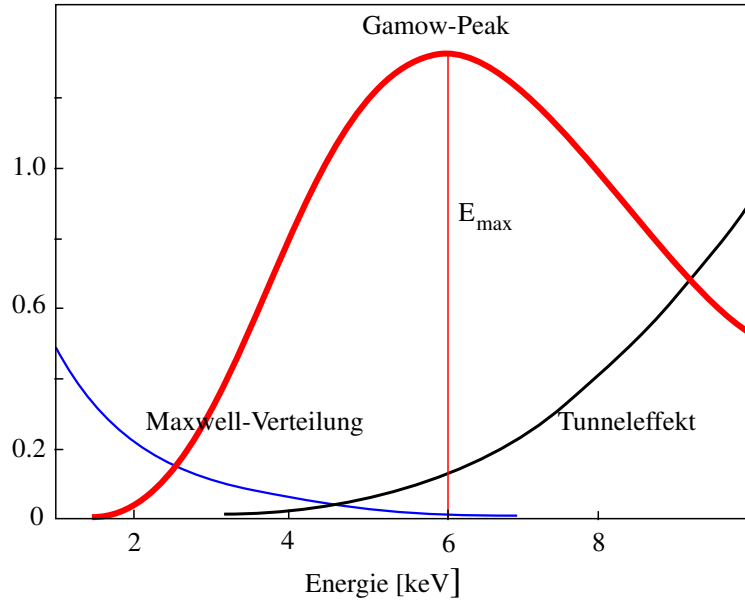


Abbildung 7: Maxwell-Verteilung, Tunneleffekt (Streuquerschnitt σ und der resultierende Gamow-Peak. Die Darstellung ist schematisch. Der tatsächliche Gamow-Peak hat eine Höhe von 10^{-6} .

Der Streuquerschnitt ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeit σ , dass der Coulomb-Wall durchtunnelt wird, und lautet nach Gamow

$$\sigma(v) = \frac{S(E)}{E} \frac{1}{v^2} e^{-\frac{\pi Z_i Z_j e^2}{\epsilon_0 h v}}. \quad (110)$$

Der Streufaktor $S(E)$ ist nur schwach von der Energie abhängig und kann im Laborexperiment bestimmt werden. Mit $E = 1/2 \cdot mv^2$ erhalten wir

$$\sigma(E) \sim \frac{1}{E} e^{-\sqrt{\frac{m_r}{2E}} \frac{\pi Z_i Z_j e^2}{\epsilon_0 h}}. \quad (111)$$

Zur Berechnung der Reaktionsrate muss das Integral über den *Gamow-Peak* F gebildet werden, wobei über alle Geschwindigkeiten integriert wird. F ist das Produkt aus der Maxwell-Verteilung (Gl. 108) und dem Streuquerschnitt (Gl. 111): $F(E) = \exp(-E/kT) - b/\sqrt{E}$.

$$R_{ijk} \sim \int_0^\infty e^{-E/kT} e^{-b/\sqrt{E}} dE, \quad (112)$$

mit dem Durchdringungsfaktor

$$b = \frac{\sqrt{m_r/2} \pi Z_i Z_j e^2}{\epsilon_0 h}, \quad (113)$$

war (Werner Heisenberg, Robert Oppenheimer, Paul Dirac, Edward Teller.

²²Die Möglichkeit, dass Materie zu Energie werden könnte, wurde bereits im Jahr 1704 von Isaac Newton erörtert, aber erst Einstein zeigte, dass die Energiequelle tatsächlich existiert, und Gamow erklärte, warum sie in Sternen d.h. bei 10^7 K funktionieren kann.

wobei m die reduzierte Masse der beiden Reaktionspartner ist und die Z_i deren Ladungszahlen. Der Wert dieses Integrals, und damit die Reaktionsrate, ist proportional zum Maximum des Produktes der beiden Exponentialfunktionen.

Dieses Maximum des Gamow-Peaks liegt bei $E_{max} = (bkT/2)^{2/3}$ (s. Abb. 7).

Für die Reaktionsrate R_{ijk} erhalten wir schließlich ²³

$$R_{ijk} \sim (kT)^{-2/3} e^{-\frac{3}{2} \left(\frac{\pi Z_i Z_j e^2}{\epsilon_0 h} \right)^{2/3}} \left(\frac{m_r}{kT} \right)^{1/3}. \quad (114)$$

Die Temperaturabhängigkeit der Reaktionsraten ist in diesem Fall einfach

$$R = R_0 T^{-2/3} e^{aT^{-1/3}}.$$

Die Reaktionsrate wächst mit der Temperatur und sinkt mit zunehmender Ladung der Reaktionspartner, d.h. die Fusion höherer Elemente erfordert auch höhere Temperatur.

2.7.1 Wasserstoff-Fusionsreaktionen

pp-Kette Die Fusion von Wasserstoff zu Helium geschieht natürlich nicht in einer einzigen Reaktion, wie in Gl. 105 suggeriert wird. Die Wahrscheinlichkeit für eine Vielteilchenreaktion ist praktisch Null. In der Tat läuft die Reaktion in einer Kette ab, bei der meistens zwei Teilchen miteinander reagieren. Die sog. *Proton-Proton-Kette* (pp-Kette) beginnt mit der Reaktion zweier Protonen zu Deuterium, gefolgt von einem weiteren Protonen-Einfang, der zur Bildung von ${}^3\text{He}$ führt. Ab diesem Punkt verzweigt die Kette. Im einfachsten Fall (ppI) folgt nun die Reaktion von zwei ${}^3\text{He}$ -Kernen zu ${}^4\text{He}$, unter Freisetzung zweier Protonen. Alternativ (ppII) reagiert ein ${}^3\text{He}$ mit einem ${}^4\text{He}$ zu ${}^7\text{Be}$, welches unter Einfang eines Elektrons zu ${}^7\text{Li}$ wird, und durch Protoneneinfang in zwei ${}^4\text{He}$ -Kernen zerfällt. Die dritte Verzweigung (ppIII) ergibt sich durch den Einfang eines Protons anstelle eines Elektrons, so dass aus ${}^7\text{Be}$ ein ${}^8\text{B}$ entsteht. Dieses zerfällt in ${}^8\text{Be}$, und daraus entstehen wieder 2 ${}^4\text{He}$ -Kerne, vgl. Tabelle ?? . Anstelle der ersten Reaktion tritt (mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.25 %) die sog. pep-Reaktion, bei der zwei Protonen und ein Elektron zu einer Deuterium verschmelzen. Bei diesem Prozess (Dreifach-Stoß) werden Neutrinos mit einer festen Energie von 1.4 MeV emittiert, d.h. die gesamte freiwerdende Energie wird an das Neutrino übertragen. Diese seltenen Neutrinos spielen eine wichtige Rolle bei den Neutrino-Experimenten, da ihre Energie über dem Schwellenwert für das Cl-Experiment liegt (die zahlreichen pp-Neutrinos aber nicht). Ein kompletter Durchlauf der pp-Kette wird als *Terminierung* (engl. *termination*) bezeichnet.

²³Das Integral kann ausgeführt werden, indem man für den Gamow-Peak eine Gauss-Verteilung annimmt.

Nr.	Teilchen	Produkte	Q[MeV]	$\langle E_\nu \rangle$ [MeV]	Anteil(%)
ppI :					
(1)	$p + p$	$\longrightarrow d + e^+ + \nu$	1.442	0.265(s)	100
(1a)	$p + e^- + p$	$\longrightarrow d + \nu$	1.442	1.442	0.4
(2)	$d + p$	$\longrightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	5.494		100
(3)	${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$	$\longrightarrow {}^4\text{He} + 2p$	12.860		85
ppII :					
(4)	${}^3\text{He} + {}^4\text{He}$	$\longrightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$	1.586		15
(5)	${}^7\text{Be} + e^-$	$\longrightarrow {}^7\text{Li} + \nu$	0.049	0.384 u. 0.86	15
(6)	${}^7\text{Li} + p$	$\longrightarrow 2{}^4\text{He}$	17.348		15
ppIII :					
(7)	${}^7\text{Be} + p$	$\longrightarrow {}^8\text{B} + \gamma$	0.137		0.02
(8)	${}^8\text{B}$	$\longrightarrow {}^8\text{Be}^* + e^+ + \nu$	14.985	6.710(s)	0.02
(9)	${}^8\text{Be}^*$	$\longrightarrow 2{}^4\text{He}$	2.995		0.02

Nukleare Reaktionen der pp-Kette. Die Spalte "Energie Q" bezeichnet die gesamte beim jeweiligen Reaktionsschritt freigesetzte Energie. Daneben ist die mittlere Energie, die durch Neutrinos abtransportiert wird, angegeben. Mit (s) ist ein kontinuierliches Neutrino-Spektrum bezeichnet. Die Differenz der beiden Werte ist die an den Stern abgegebene thermische Energie. Die letzte Spalte gibt die Terminierung an, d.h. den Anteil der jeweiligen Reaktion an einem kompletten Durchlauf der pp-Kette.

Die ppII-Kette ist eine Alternative zur 3. Reaktion von ppI, und die ppIII-Kette ist eine Alternative zur zweiten Reaktion von ppII. Die Anteile der drei Zweige hängen von den Reaktionsraten ab, die wiederum von der Temperatur (stark) und von der aktuellen Zusammensetzung abhängen. Bei der heutigen Sonne beträgt das Verzweungsverhältnis 85.2:14.8 für ppI:(ppII+ppIII) und 14.8:0.019 für ppII:ppIII. Dies ist vor allem wichtig bei der Neutrino-Frage. In allen drei Fällen ist die freigesetzte Energie gleich und beträgt, wie schon erwähnt, 26.732 MeV pro α -Teilchen.²⁴ Bei den Neutrino-Energien handelt es sich entweder um ein kontinuierlich Spektrum, oder um Linien (z. B. beim Elektroneneinfang in der ppII-Kette). Die erzeugten Neutrinos sind in allen Fällen Elektron-Neutrinos. Eine eingehende Diskussion der Neutrinos folgt weiter unten im Abschnitt 2.8.

Für die nukleare Energieerzeugung der Sonne ist vorwiegend die pp-Kette von Bedeutung. Sie liefert rund 99 % der gesamten Energie. Etwa 1 % stammen aus dem CNO-Zyklus. Dieser wurde 1938 von C.F.v.Weizsäcker und 1939 von H. Bethe als nukleare Energiequelle der Sonne vorgeschlagen (damals ging man noch von höheren Zentraltemperaturen bis 20 Mio Kelvin aus). Beim CNO-Zyklus agieren die vorhandenen Elemente C, N, und O als Katalysatoren, d.h. sie werden nicht produziert oder zerstört. Die folgende Tabelle zeigt die CNO-Reaktionskette mit der in jedem Schritt freigesetzten Energie einschließlich der Neutrino-Energie. Die insgesamt freigesetzte Energie beträgt wiederum 26.732 MeV.

²⁴Die ersten beiden Reaktionen müssen doppelt gezählt werden, weil sie zweimal ablaufen müssen, um einen ${}^4\text{He}$ -Kern zu erzeugen.

Teilchen	Produkte	Energie	E_ν
$^{12}\text{C} + p$	\longrightarrow $^{13}\text{N} + \gamma$	1.944	
^{13}N	\longrightarrow $^{13}\text{C} + e^+ + \nu$	2.220	0.707
$^{13}\text{C} + p$	\longrightarrow $^{14}\text{N} + \gamma$	7.551	
$^{14}\text{N} + p$	\longrightarrow $^{15}\text{O} + \gamma$	7.298	
^{15}O	\longrightarrow $^{15}\text{N} + e^+ + \nu$	2.747	0.997
$^{15}\text{N} + p$	\longrightarrow $^4\text{He} + ^{12}\text{C}$	4.996	

Im Abschnitt 2.5.4 wurden die nuklearen Reaktionen allgemein beschrieben. Anhand Gl. 60 kann man die Energie Q_{ijk} , die bei einer bestimmten Reaktion freigesetzt wird, folgendermaßen abschätzen:

$$Q_{ijk} = (M_i + M_j - M_k - M_l)c^2 - E_\nu. \quad (115)$$

Die M_i bezeichnen die Massen der Reaktionspartner und E_ν ist die von den Neutrinos ggfs. abtransportierte Energie (s. Tabelle 2.7.1). Die gesamte freigesetzte Energie an einer beliebigen Stelle in einem Stern erhält man aus der Gesamtzahl an Kernreaktionen pro Volumeneinheit $n_i n_j R_{ijk}$. Die dazugehörige Energie ist $n_i n_j R_{ijk} Q_{ijk}$. Nun summieren wir über alle vorkommenden Reaktionen und ersetzen die Teilchenzahlen durch die Dichte (s. Gl. 59), dann erhalten wir die freigesetzte Energie ϵ pro Masseneinheit zu

$$\epsilon = \frac{\rho}{m_H^2} \sum_{ijk} \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \frac{X_i X_j}{A_i A_j} R_{ijk} Q_{ijk}. \quad (116)$$

Die Änderungen der Teilchenzahlen aufgrund der Kernreaktionen ermittelt man anhand Gl. 62. Die Energiewerte für die einzelnen Reaktionen der pp- und der CNO-Kette sind in den obigen Tabellen aufgelistet, die dazugehörigen Reaktionsraten folgen prinzipiell aus Gl. 114. Der dortige Proportionalitätsfaktor, der Wirkungsquerschnitt, wird im Laborexperiment bestimmt. Das Problem dabei ist die Extrapolation zu den geringen Energiewerten, die in der Sonne vorherrschen. Die einzelnen Reaktionen, insbesondere die Verzweigungen der pp-Kette, sind sehr temperaturempfindlich, $Q \sim T^n$, wobei n , je nach Reaktion, Werte bis zu 20 erreichen kann.

2.8 Neutrinos

Die Erforschung der solaren Neutrinos hat um 1964 begonnen. Die zentrale Fragestellung lautete damals: gibt es die solaren Neutrinos in der vom Standard-Sonnenmodell vorhergesagten Anzahl, und kann man sie auf der Erde nachweisen. Die Existenz wurde zwar nicht bezweifelt, aber einen experimentellen Nachweis gab es bis dato nicht. Damit gab es auch keinen direkten Beweis für die H-Fusion im Sonneninneren. Die Nachweisbarkeit war das größere Problem, war doch bekannt, dass die Neutrinos kaum mit Materie wechselwirken. Die Sonne ist praktisch vollständig transparent für Neutrinos – die Erde natürlich ebenfalls. Der Neutrino-Fluss an der Erdoberfläche beträgt rund $6 \cdot 10^{14} \nu / (\text{m}^2 \text{s})$. Der Streuquerschnitt von Neutrinos ist allerdings nur 10^{-50} m^{-2} .

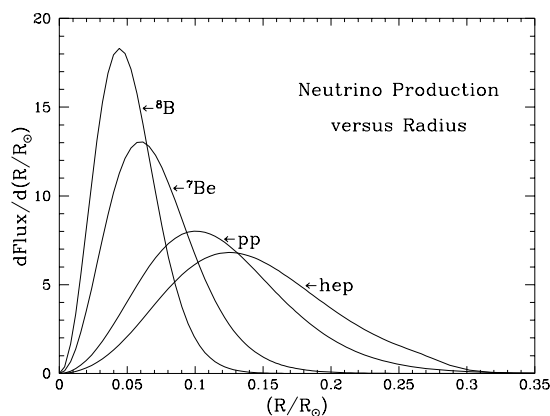


Abbildung 8: Neutrino-Fluss als Funktion des Radius. Die einzelnen Kurven sind mit den jeweiligen Kernreaktionen gekennzeichnet (Bahcall, 2000).

Der Nachweis der solaren Neutrinos zeigt, dass es jetzt (d.h. 8 Minuten vor dem Nachweis) Fusion im Sonneninneren gibt. Die gleichzeitig erzeugte Energie, d.h. die Photonen, benötigen ja viele Millionen Jahre, bis sie die Sonnenoberfläche erreichen.

Aus dem Standard-Sonnenmodell folgt, dass 99 % der solaren Neutrinos aus dem pp-Zyklus stammen und nur 1% aus dem CNO-Zyklus. Auch diese Vorhersage wurde von den Neutrino-Nachweisexperimenten bestätigt: der CNO-Zyklus würde (bei diesen Experimenten) 10 mal mehr Neutrinos liefern als der pp-Zyklus.

Abbildung 8 zeigt, aus welchen Schichten im Sonneninneren die zu den einzelnen Reaktionen gehörenden Neutrinos herkommen. Die Kurven wurden mit einem Standard-Sonnenmodell berechnet.

Auszug aus der Pressemitteilung der Königl. Schwed. Akad. der Wissenschaften zum Nobelpreis in Physik 2002:
 Raymond Davis Jr constructed a completely new detector, a gigantic tank filled with 600 tonnes of fluid, which was placed in a mine. Over a period of 30 years he succeeded in capturing a total of 2,000 neutrinos from the Sun and was thus able to prove that fusion provided the energy from the Sun. With another gigantic detector, called Kamiokande, a group of researchers led by Masatoshi Koshiba was able to confirm Daviss results. They were also able, on 23 February 1987, to detect neutrinos from a distant supernova explosion.

Die dominante Neutrino-Quelle ist die pp-Reaktion (1) (s. Abschn. 2.7.1), mit einem kontinuierlichen Energiespektrum von 0 bis 0.4 MeV. Die (seltene) pep-Reaktion (2) liefert Neutrinos mit einer Energie von 1.4 MeV. Die ${}^7\text{Be}$ -Reaktion (6) liefert 15 % der Leuchtkraft und eine Neutrino-Linie bei 0.8 MeV. Die ${}^8\text{B}$ -Reaktion (9) der ppIII-Kette ist sehr selten, sie liefert nur 0.1 % aller solaren Neutrinos, mit einem kontinuierlichen Spektrum von 0 bis 14 MeV. Entscheidend für die Neutrinflüsse sind die Verzweungsverhältnisse

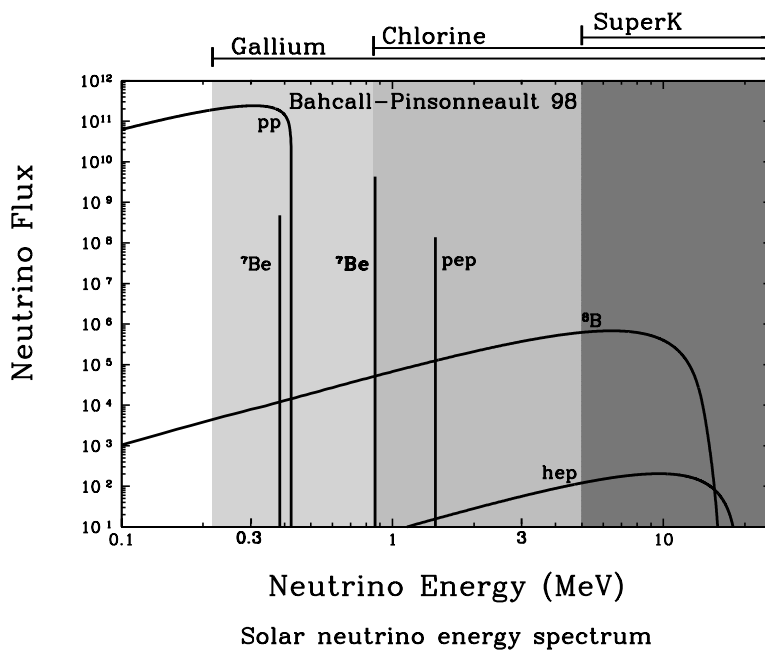


Abbildung 9: Neutrino-Energiespektrum der Sonne (Aus Bahcall, 2000). Die Empfindlichkeit der verschiedenen Experimente ist markiert.

zwischen ppI und ppII, bzw. zwischen ppII und ppIII. Die Unsicherheiten des Standardmodells liegen hier bei 1% bzw. 15%.

2.8.1 Neutrino-Experimente

Es gibt heute eine Reihe ganz unterschiedlicher Experimente die sich mit der Messung von solaren (und z. T. auch extrasolaren) Neutrinos befassen. Die Unterschiede sind nicht nur technischer Natur, vielmehr sind die diversen Experimente auch für ganz unterschiedliche Bereiche des Energiespektrums der Neutrinos empfindlich. Die wichtigsten Experimente sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Spalte 2 gibt die solare Neutrino-Reaktion an, Spalte 3 ist die Nachweismethode; die letzte Spalte ist die Mindestenergie für Neutrinos, damit sie im entsprechenden Experiment nachgewiesen werden können.

Das ^{37}Cl -Experiment Der erste Neutrino-Detektor wurde Mitte der 60er Jahre von R. Davis in einer ehemaligen Goldmine in S. Dakota gebaut. Der Standort wurde gewählt, um Einflüsse der kosmischen Strahlung auszuschließen. Der Neutrino-Detektor besteht aus 133 Tonnen ^{37}Cl in Form von 380000 Litern von C_2Cl_4 (Tetrachlorethen, "Per"). Das Isotop ^{37}Cl ist zu rund 25% in Chlor enthalten. Die Lebensdauer von ^{37}Ar ist 35 Tage. Das ist lang genug, um es sicher nachweisen zu können, und kurz genug, um eine vernünftige Wiederholrate der Messung zu ermöglichen. Die vorhergesagte Ereignisrate bei diesem Experiment folgt aus dem Standard-Sonnenmodell und der Anzahl der ^{37}Cl -Atome im Detektor und liegt bei $7.9 (\pm 0.33)$ SNU. Von den 7.9 SNU kommen 6.1 von

Experiment	Neutrino-Erzeugung	Nachweisreaktion	E_{min} [MeV]
Cl	pep, 8B , CNO	$\nu_e + {}^{37}Cl \rightarrow e^- + {}^{37}Ar$	0.814
GALLEX	alle	$\nu_e + {}^{71}Ga \rightarrow e^- + {}^{71}Ge$	0.233
SAGE	alle	$\nu_e + {}^{71}Ga \rightarrow e^- + {}^{71}Ge$	0.233
Super-Kamiokande	8B	$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$	5.5
SNO	${}^8B + p$	$\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ (CC)	5.00
		$\nu_x + d \rightarrow p + n + \nu_x$ (NC)	5.00
		$\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^-$ (ES)	5.00
BOREXINO	7Be	$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$	0.5

Tabelle 1: Neutrino-Experimente: gemessene solare Neutrino-Reaktion, Nachweismethode, untere Nachweisgrenze solarer Neutrinos.

der 8B -Reaktion und 1.8 aus allen anderen REaktionen (incl. CNO-Zyklus) zusammen.

Ein Vergleich zwischen der Vorhersage und der Messung ist in Abb. 10 zu sehen. Die Unterschiede der Vorhersagen seit 1968 sind gering, obwohl es unzählige Verbesserungen beim Sonnenmodell gegeben hat, bei der Zustandsgleichung, bei den Opazitäten, etc.

Die Güte des Argon-Nachweises wird dadurch bestimmt, dass eine genau bestimmte Menge (z. B. 0.1 ml) von (isotopisch) reinem ${}^{36}Ar$ in den Tank gegeben wird. Die Menge des nach einer Messung extrahierten Argon ist ein direktes Maß für die Nachweiseffizienz. Das Argon wird extrahiert, indem eine große Menge Helium in den Tank gebracht wird, und das Ganze dann u.a. bei -190 C über ein Kohlefilter geführt wird, wo das Argon absorbiert wird. Nachdem das Verhältnis von eingebrachtem und extrahiertem Argon bestimmt wurde (es liegt bei 0.95), wird der Anteil des radioaktiven ${}^{37}Ar$ mit einem geeigneten Zähler bestimmt. Die vorhergesagte Zählrate entspricht einer Zahl von 50 ${}^{37}Ar$ -Atomen, gelöst in den 380 m³ Per. Chemisch verhält sich ${}^{37}Ar$ genau gleich wie das eingebrachte ${}^{36}Ar$, d.h. die Nachweiseffizienz ist bei beiden Isotopen gleich.

Die gemessene Ereignisrate liegt (zeitlich praktisch konstant) bei 2.05 SNU. Die Diskrepanz wurde viele Jahre lang der Astrophysik angelastet, d.h. man nahm an, dass der Neutrino-Fluss aus der 8B -Reaktion (Reaktion 8 der pp-Kette, s. Abschn. 2.7.1), falsch sei. In der Tat war das Ergebnis von Davis' Experiment verträglich mit der Aussage, dass es überhaupt keine 8B -Neutrinos gibt.

Ga-Experimente Die Gallium-Detektoren von Gallex, GNO und SAGE basieren auf einer Neutrino-Einfang-Reaktion Die Energieschwelle liegt bei nur 233 keV, unterhalb des Maximums der Energieverteilung der pp-Neutrinos. ${}^{71}Ge$ hat eine Halbwertszeit von 11.5 Tagen und zerfällt durch Elektroneneinfang zu ${}^{71}Ga$. Aus dem Standard-Sonnenmodell ergibt sich ein Neutrino-Fluss von 132 SNU für Gallex, davon 74 SNU an pp und pep Neutrinos. Das Gallium solar Neutrino Observatory (GNO) des Laboratori Nazionali del Gran Sasso ist das Nachfolgeexperiment zu Gallex. Das Neutrino-Target besteht aus 30 Tonnen natürlichem Gallium, in einer $GaCl_3$ -Lösung. Ein Neutrino-Experiment läuft etwa so ab:

- Nach etwa 4 Wochen sind durch die solaren Neutrinos etwa 10 Ge-Kerne entstanden.

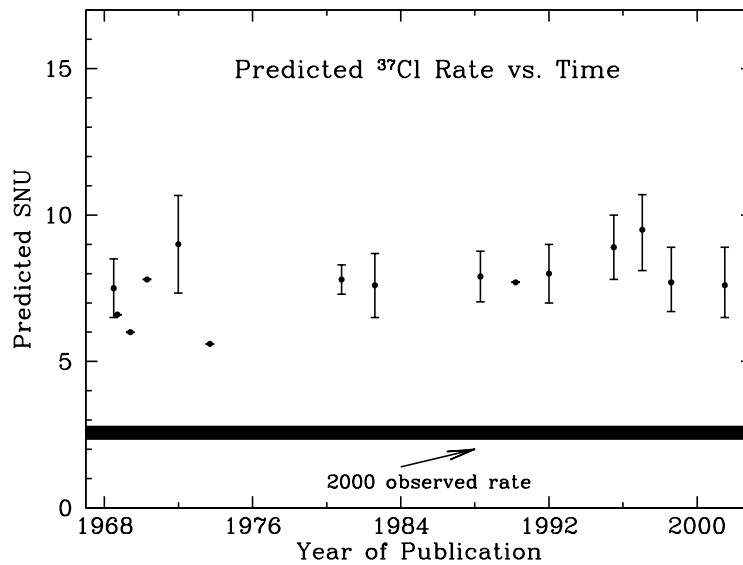


Abbildung 10: Vorhergesagte und gemessene Anzahl von Neutrinos beim ^{37}Cl - Experiment (Aus Bahcall, 2000).

- Das ^{71}Ge wird chemisch, mit Hilfe von Stickstoff aus der Lösung extrahiert.
- Das ^{71}Ge wird in GeH_4 umgewandelt und in Mini-Proportional-Zählern deponiert.
- Der Zerfall des ^{71}Ge wird über einen Zeitraum von 6 Monaten verfolgt.

Die neueren Ergebnisse von GNO sind vergleichbar mit den in Abb. 11 dargestellten Werten des Gallex-Experimentes. Das Messergebnis liegt etwa einen Faktor 2 unter den Modellvorhersagen.

Die H_2O -Experimente Die japanischen Experimente Kamiokande und Super-Kamiokande sind ursprünglich als Cerenkov-Detektoren zum Nachweis des Proton-Zerfalls (KAMIO-KANDE: Kamioka Nucleon Decay Experiment) konzipiert worden. Mit Kamiokande wurden am 23. Februar 1987 auch 10 Neutrinos einer Supernova-Explosion gemessen, die in der Großen Magellanschen Wolke stattfand.

Diese Neutrino-Detektoren sind, im Gegensatz zu den chemischen Experimenten richtungsempfindlich, d.h. man kann anhand der Richtung des Cerenkow-Kegels die Richtung bestimmen, aus der das Teilchen kam. Damit wurde zum Beispiel nachgewiesen, dass die beobachteten Neutrinos tatsächlich von der Sonne kommen. Tabelle 2 stellt die wichtigsten Parameter des Super-Kamiokande-Experiments zusammen. Die H_2O -Experimente haben eine hohe Energieschwelle von 5 MeV, d.h. sie messen ausschließlich die ^8B -Neutrinos. Man kann auch die Energien der gestreuten Elektronen bestimmen und damit Information über das Energiespektrum der einfallenden Neutrinos erhalten.

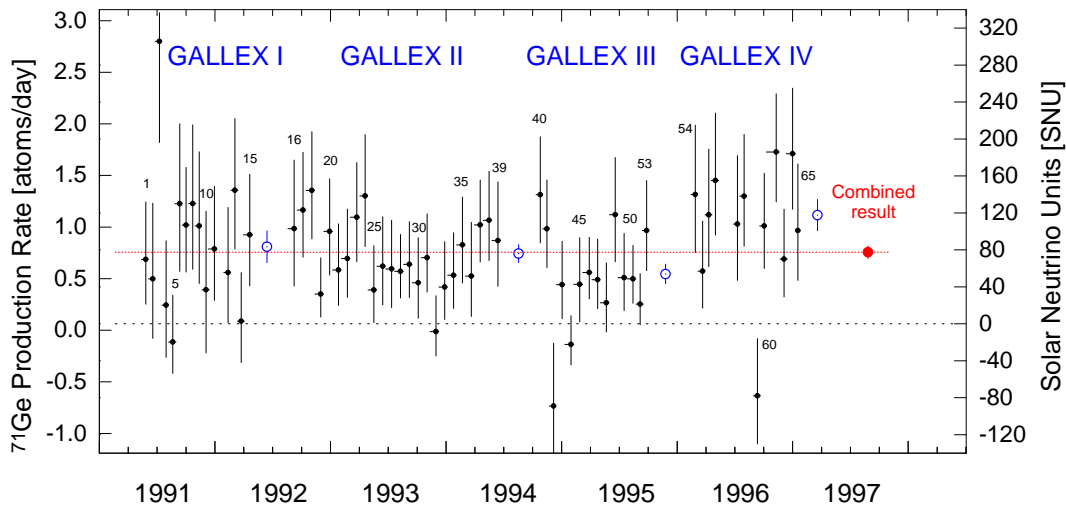


Abbildung 11: Messergebnisse des Gallex-Experiments für die Jahre 1991 bis 1997. Das Ergebnis liegt im Mittel bei 73.4 SNU

Merkmal	Beschreibung
Größe	Zylinder: 41.4m (H) x 39.3m (D)
Detektor	50,000 Tonnen ultrareines Wasser
Lichtempfindlichkeit	11,200 Photomultiplier (jede mit 50cm Durchmesser)
Energieauflösung	2.5% (bei 1 GeV); 16 % (bei 10 MeV)
Energieschwelle	5 MeV
Ort	Kamioka (J)

Tabelle 2: Eigenschaften von Superkamiokande

Borexino Das Borexino-Experiment wird im Grand-Sasso-Tunnel in den Alpen aufgebaut. Der Nachweis der Neutrino-Elektron-Streuung im 2400 t Wasserbehälter geschieht mit einem organischen Szintillator: die von den Neutrino-Stößen beschleunigten Elektronen verursachen Lichtblitze im Szintillatormaterial, die dann mit einer großen Anzahl von Photomultipliern gemessen werden. Borexino hat allerdings keine Richtungsauflösung, im Gegensatz zu Super-Kamiokande. Der prinzipielle Aufbau des Experiments ist in Abb. 12 skizziert.

Sudbury Neutrino Observatory Im SNO gibt es drei mögliche Nachweisreaktionen für Neutrinos:

- (a) die Ladungs-Reaktion $\nu_e + d \longrightarrow p + p + e^-$ (CC)
- (b) die Neutral-Reaktion $\nu_x + d \longrightarrow p + n + \nu_x$ (NC)
- (c) Elektronenstreuung $\nu_x + e^- \longrightarrow \nu_x + e^-$ (ES).

Da die Sonne nur Elektron-Neutrinos produziert, ist eine unterschiedliche Zählrate bei den genannten Reaktionen der Nachweis, dass es Neutrino-Oszillationen gibt, d.h. dass die Neutrinos eine endliche Masse haben. Dieser Nachweis ist mit SNO im Jahr 2002

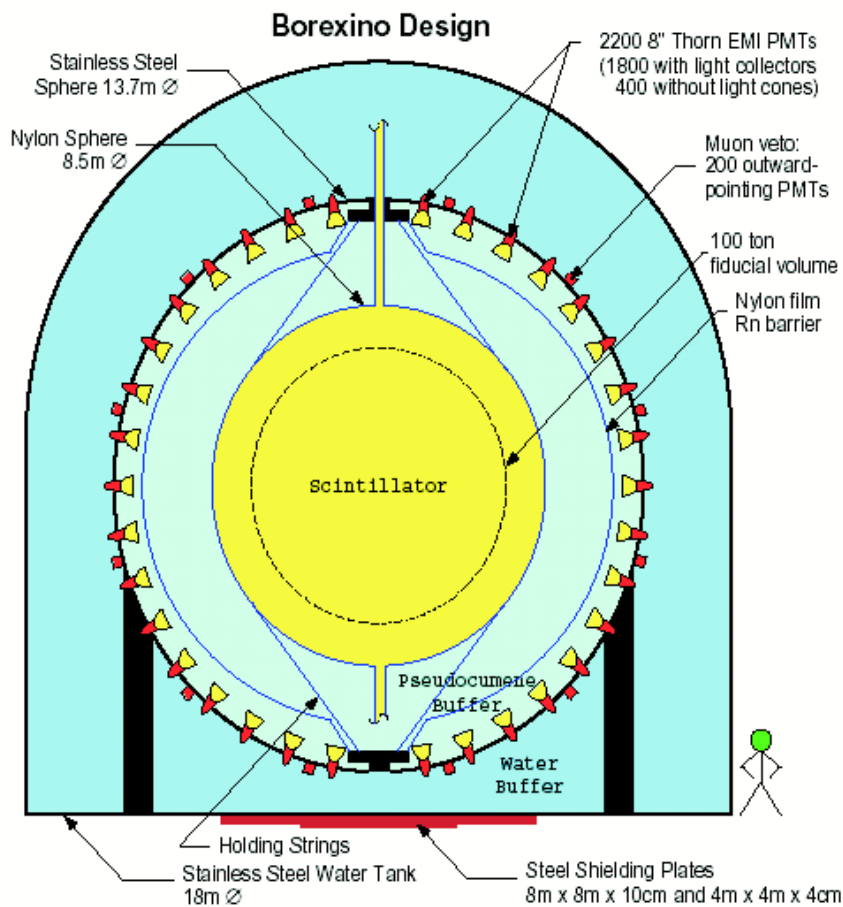


Abbildung 12: Aufbau des Borexino-Detektors

gelungen (s. Abb. 13): die Zählrate der NC-Reaktion stimmt mit der Vorhersage des Standardmodells überein. Die wichtigsten Parameter des Sudbury-Experiments sind in der Tabelle 3 zusammengefasst.

2.8.2 Die "klassischen" Neutrino-Probleme

1. Berechneter und beobachteter Neutrino-Fluss beim Chlor-Experiment: Das Experiment liefert 2.55 ± 0.25 SNU, das ist etwa ein Faktor 3.6 weniger als der vom Standardmodell vorhergesagte Wert von $9.3 + 1.2 / -1.4$ SNU. Aus dem Modell folgt, dass der Löwenanteil der mit dem Cl-Experiment messbaren Neutrinos aus der 8B -Neutrinos stammt, aber auch solche aus der 7Be -Reaktion, und die pep-Neutrinos werden gemessen. Außerdem trägt auch der CNO-Zyklus noch etwa 1 SNU bei.²⁵
2. Inkompatibilität der H₂O- und der Cl-Experimente: Mit Kamiokande wird gezeigt

²⁵1 SNU = 10^{-36} Ereignisse pro Targetatom und pro Sekunde.

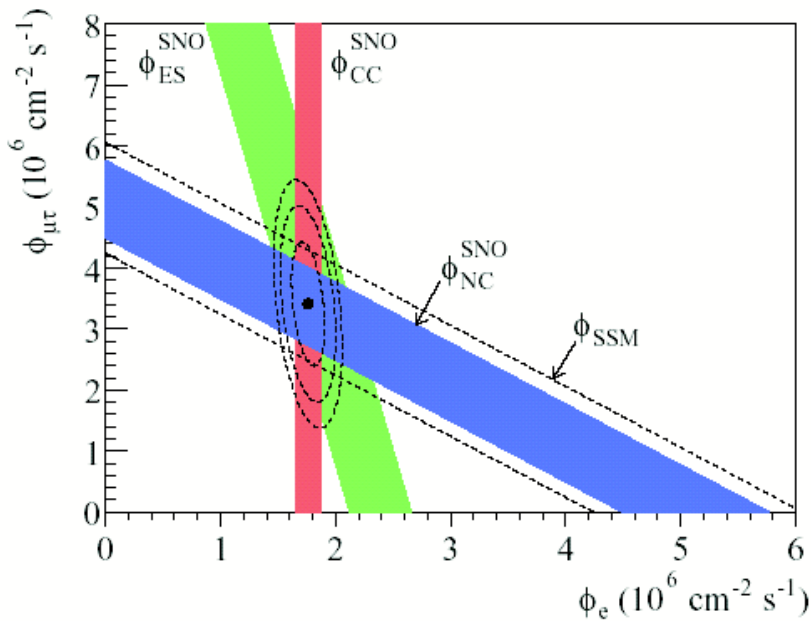


Abbildung 13: Hinweis auf Neutrino-Oszillationen aus Messungen von SNO. Aufgetragen ist der Fluss von μ oder τ -Neutrinos als Funktion der Elektronen-Neutrinos aus der 8B -Reaktion. Die Messwerte schneiden sich innerhalb des vom Standardmodell vorhergesagten Bereichs Φ_{SSM} .

Merkmal	Beschreibung
Größe	Kugelförmiger Tank, 18 m Durchm.
Detektor	1000 t Schwerwasser (D_2O)
Nachweismethode	Cerenkow-Strahlung
Besonderheit	empfindlich für alle Neutrino-Arten
Ort	Sudbury (CAN)

Tabelle 3: Eigenschaften des SNO-Experiments

(anhand der Richtungscharakteristik der Cerenkow-Strahlung), dass alle nachgewiesenen Neutrinos von der Sonne kommen. Mit Kamiokande werden ausschließlich 8B -Neutrinos nachgewiesen. Das Cl-Experiment misst hauptsächlich die 8B -Neutrinos, aber auch andere, z. B. 7Be , pep und CNO, so dass die Messwerte von Cl erheblich (ca. 1.3 SNU) über denen von Kamiokande liegen müssten. Tatsächlich misst Kamiokande *mehr* Neutrinos als das Cl-Experiment. Eine Anpassung der 8B -Rate durch Änderung des Sonnenmodells kann diesen Widerspruch nicht lösen.

- Gallex misst pp, pep, 7Be und 8B -Neutrinos. Der gemessene Fluss von 74 SNU lässt keinen Raum für die 7Be -Neutrinos, die es aber geben *muss*. Das Modell sagt für die Gallium-Experimente einen Neutrinofluss von 72.4 SNU alleine von der pp und der pep-Reaktion voraus, sowie 34 SNU von der 7Be -Reaktion. Das scheinbare Fehlen von allen Neutrinos ausser den pp-Neutrinos wird als *drittes Neutrino-Problem* bezeichnet. Man kann die fehlenden 7Be -Neutrinos nicht durch Ändern

des Sonnenmodells wegdiskutieren. Kamiokande misst eindeutig die 8B -Neutrinos. Die 7Be -Neutrinos werden aber konkurrierend dazu erzeugt. Wollte man also den 7Be -Fluss reduzieren, würde man den 8B -Fluss noch stärker verringern, und den Widerspruch zu den H_2O -Experimenten verstärken.

Die hier beschriebenen Probleme bzw. Widersprüche lassen sich auf zweierlei Weise auflösen: entweder haben die meisten Neutrino-Experimente falsche Ergebnisse geliefert (unabhängig voneinander, und wiederholt), oder man muss Änderungen des Neutrinospektrums zulassen, nachdem diese in der Sonne erzeugt worden sind. Die jüngsten Ergebnisse von SNO und auch von Superkamiokande zeigen, dass die Neutrinos nicht masselos sind und daher auf dem Weg zum Detektor ihren Zustand ändern können.

2.8.3 Wie genau sind die berechneten Neutrinoflüsse

Die theoretischen Vorhersagen für die Neutrinoflüsse sind aus verschiedenen Gründen zuverlässig:

- die Kernreaktionen, die zu den Neutrinos führen, müssen die Leuchtkraft und den Radius der Sonne ergeben. Beides kann sehr genau gemessen werden.
- das so bestimmte Sonnenmodell liefert die Schallgeschwindigkeit als Funktion der Tiefe. Diese kann heute sehr genau mittels der Helioseismologie bestimmt werden. Die Unterschiede zwischen Modell und Messung ist minimal (10^{-3} über das gesamte Messintervall, von $0.05 R_\odot$ bis $0.95R_\odot$ (s. Abb. 14). Im Kern der Sonne, zwischen $0.05R_\odot$ und $0.25R_\odot$ werden 95 % der Energie und auch der Neutrinos produziert (vgl. Abb. 19). Dort ist die Unsicherheit der Schallgeschwindigkeit nur $0.7 \cdot 10^{-3}$. Die Schallgeschwindigkeit ist proportional zur $T^{1/2}$, wohingegen der für das Gallium-Experiment maßgebliche 7Be -Fluss proportional zu T^{10} ist. Um die Vorhersage und die Messung beim Gallium-Experiment in Einklang zu bringen, wäre eine Änderung der Schallgeschwindigkeit um mehrere % Prozent erforderlich (s. Pfeil in Abb. 14).

2.8.4 Die Sonne als Neutrino-Quelle

Im Hinblick auf die Untersuchungen von möglichen Neutrino-Oszillationen ist die Sonne, im Vergleich zu irdischen Neutrinoquellen, eine ideale Quelle für die Neutrino-Forschung:

- zwischen Erzeugung im Sonneninneren und dem Nachweis auf der Erde legen die Neutrinos eine Strecke von 10^{11} Metern zurück
- die geringe Energie (typ. 1 MeV) solarer Neutrinos,
- der enorme Weg, den die Neutrinos durch Materie zurücklegen müssen, bevor sie detektiert werden können. Die Säulendichte der Sonne beträgt

$$d = \int \rho dr \simeq 2 \cdot 10^{11} \text{kgm}^{-2} .$$

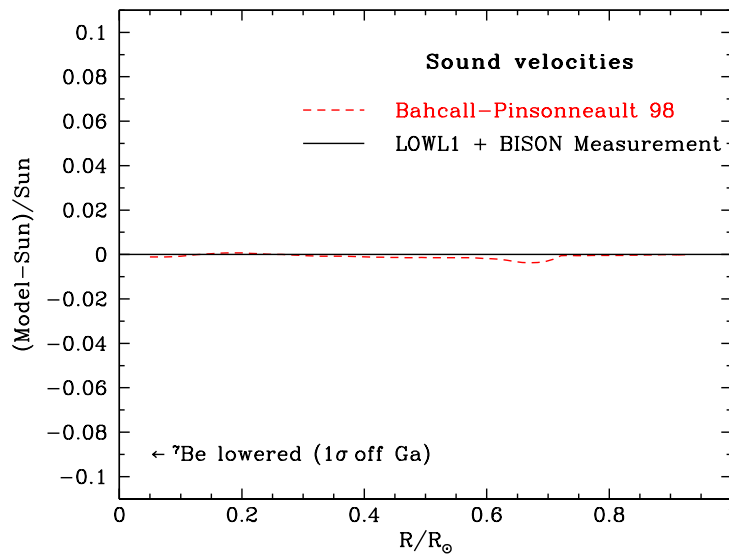


Abbildung 14: Schallgeschwindigkeit in der Sonne: Vorhersage des Standardmodells und helioseismologische Beobachtung (John N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, and Sarbani Basu, 2001, ApJ, 555, 990).

Als quantitatives Maß für die Empfindlichkeit bzw. die Wahrscheinlichkeit einer Transformation (=Oszillation) kann man die Eigenzeit R eines Neutrinos ansehen. Die Zeit R ist proportional zum Verhältnis aus Weglänge und Energie:

$$R \sim \frac{\text{Wegstrecke}}{\text{Energie}} = \frac{10^8}{10^{-3}} \text{ km/GeV}.$$

Bei Laborexperimenten ist die Eigenzeit viel kürzer und liegt bei ca. 100 km/GeV. Aufgrund der viel längeren Eigenzeit sind Experimente mit solaren Neutrinos empfindlich für sehr kleine Neutrino-Massen, im Bereich $10^{-6} < E_\nu < 10^{-5}$ eV, die Vakuum-Oszillationen durchführen können. Bei Laborexperimenten ist man bei Neutrinomassen von 1 eV. Bei materieinduzierten Neutrino-Oszillationen durch den Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein-Effekt (MSW-Effekt), durch Wechselwirkung mit Elektronen in der Sonne liegt der Energiebereich bei $10^{-4} < E_\nu < 10^{-2}$ eV.

2.8.5 Zusammenfassung

Hauptergebnisse

- Es gibt Neutrinos, die von der Sonne kommen, d.h. es gibt Kernfusion.
- Die nukleare Energie wird zu 99 % durch den pp-Zyklus erzeugt.
- Die Abweichungen der Experimente von den Vorhersagen lassen sich nicht durch einfache Modifikation des Standard-Sonnenmodells beheben.

Total Rates: Standard Model vs. Experiment
Bahcall-Pinsonneault 2000

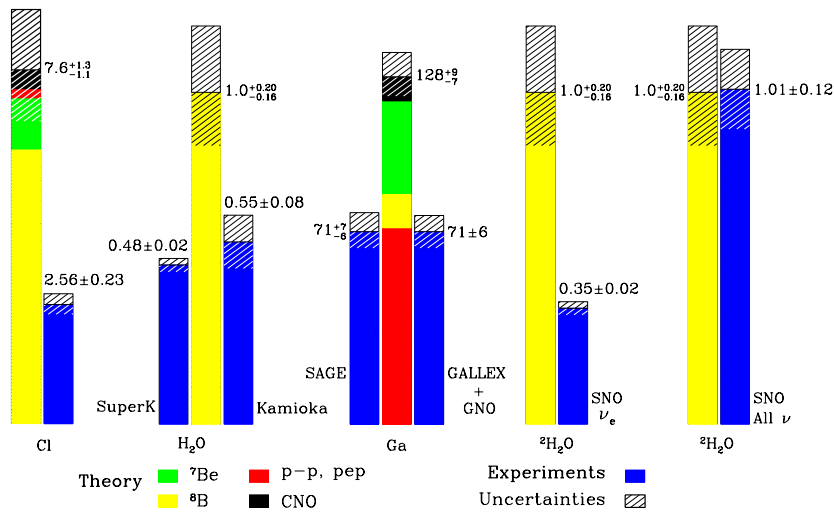


Abbildung 15: Vergleich der verschiedenen Neutrino-Experimente und den Modellvorhersagen (Bahcall, 2000).

- Die gemessenen Neutrino-Flüsse stimmen bis auf einen Faktor 2 - 3 mit den Vorhersagen des Sonnenmodells überein. (Obwohl Temperaturabhängigkeit bis T^{20} besteht!)
- Es muss Neutrino-Oszillationen geben, anders sind die Widersprüche zw. den Experimenten nicht aufzulösen. Die ersten Ergebnisse des Schwerwasser-Experiments SNO deuten ebenfalls in diese Richtung.

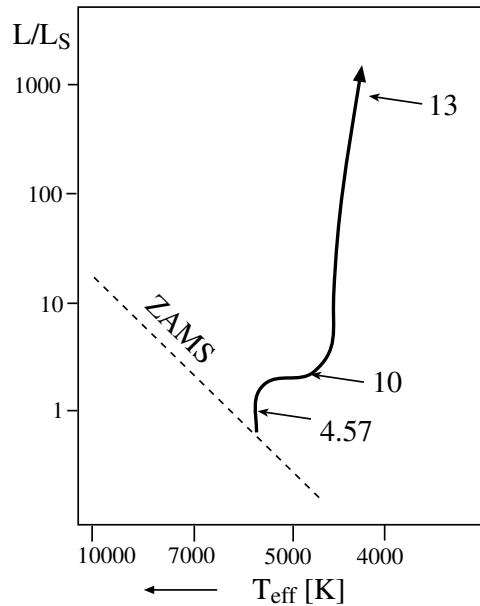


Abbildung 16: Der Entwicklungsweg der Sonne im Hertzsprung-Russell-Diagramm. Die Abszisse zeigt die Oberflächentemperatur, die Ordinate die Leuchtkraft in Einheiten der heutigen Leuchtkraft. Die Zahlen neben dem Entwicklungsweg geben das Alter der Sonne an, gerechnet vom Erreichen der Ur-Hauptreihe (ZAMS).

2.9 Sonnenmodell

Mit den in den bisherigen Abschnitten diskutierten Gleichungen (4 Differentialgleichungen für m , P , L und T , jeweils als Funktion der Masse und den Gleichungen für Dichte, Opazität und Energieerzeugung, s. Gln. 68 kann nun das Sonnenmodell berechnet werden. Für die numerische Berechnung müssen noch die Randbedingungen festgelegt werden. Am inneren Rand ($m=0$) sind diese ganz einfach: $r(m=0)=0$ und $L(m=0)=0$. Da die Energieproduktion im Inneren konzentriert ist, gilt $L(m=m_{\odot})=L_S$ über weite Strecken, nicht nur an der Oberfläche. Naheliegender ist es, den Druck an der Oberfläche, $P(m=m_{\odot})=0$ zu setzen. Für genaue Rechnungen müssen die Randbedingungen an der Oberfläche mittels eines Atmosphärenmodells genauer definiert werden. Die numerischen Rechnungen für ein sog. *Standardmodell* beginnt man in der Regel beim Erreichen des Sterns auf der Hauptreihe ($T_{\text{nuk}}=0$). Der erste Schritt der iterativen Rechnung liefert dann die sog. Ursonne. Sie ist etwas kleiner und deutlich schwächer als die heutige Sonne. Das Ergebnis einer Rechnung für einen bestimmten Zeitpunkt dient dann als Anfangsbedingung für den folgenden Zeitschritt usw. Bei einem Alter von $4.57 \cdot 10^9$ Jahren (=heute) muss das Sonnenmodell dann die heutigen Werte für den Radius und die Leuchtkraft erreichen. Tabelle 4 gibt Radius und Leuchtkraft der Sonne als Funktion des Alters an für das Standardmodell von Bahcall & Pinsonneault (1995). Der Index \odot bezeichnet Werte der heutigen Sonne. In Abb. 16 ist der Entwicklungsweg der Sonne im HR-Diagramm, wie er sich aus dem Standard-Sonnenmodell ergibt, skizziert. Der Verlauf von Druck, Temperatur, Dichte und Leuchtkraft als Funktion der Tiefe für die heutige Sonne sind in Tab. 5 zusammengefasst, und in den Abbildungen 17, 18 und 19 graphisch dargestellt.

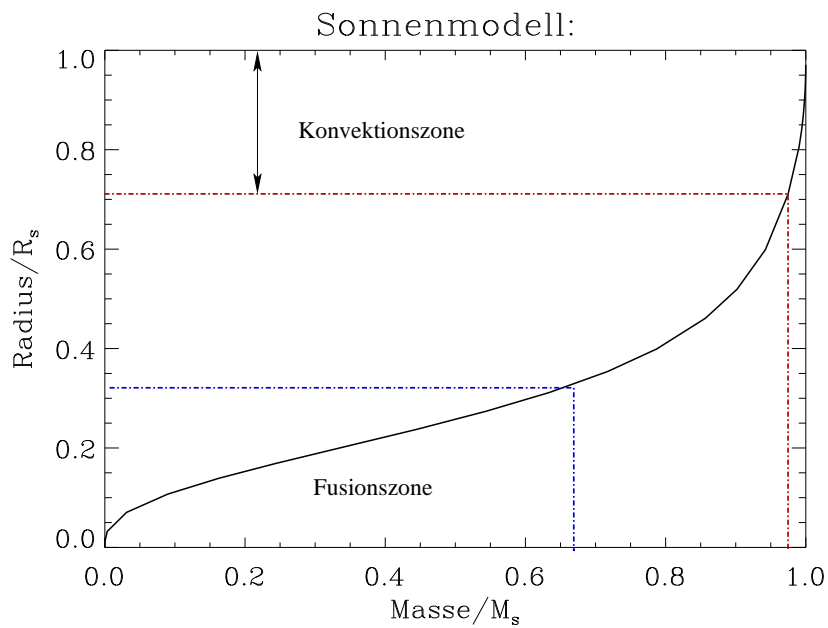


Abbildung 17: Radius als Funktion der Masse: Zwei Drittel der Masse befinden sich im Kern, innerhalb $r=0.31 \cdot r_{\odot}$. Die Konvektionszone ($0.71 \leq r \leq r_{\odot}$) enthält weniger als 2 % der Gesamtmasse.

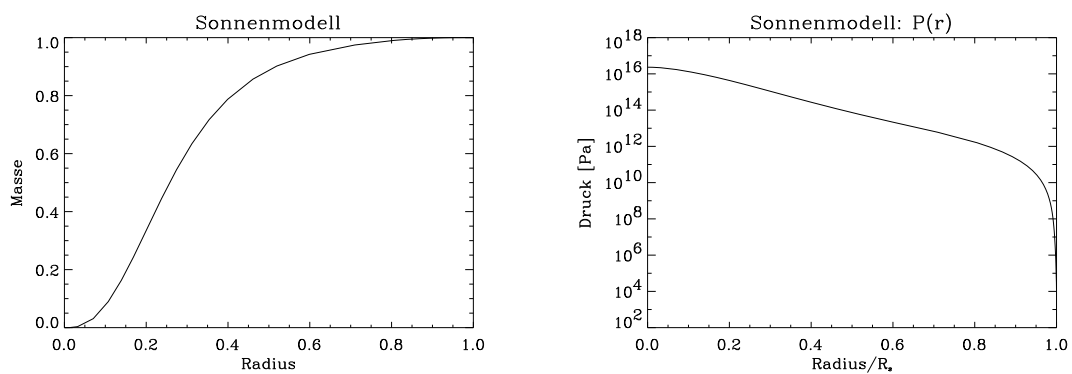


Abbildung 18: Masse und Druck als Funktion des Radius

Alter 10 ⁹ a	Radius [R/R _⊙]	Leuchtkraft [L/L _⊙]
0.0	0.869	0.677
1.0	0.901	0.764
2.0	0.924	0.820
3.0	0.951	0.882
4.0	0.981	0.954
4.57	1.0	1.0
5.0	1.016	1.037
6.0	1.057	1.132
7.0	1.105	1.235
8.0	1.166	1.363

Tabelle 4: Radius und Leuchtkraft der Sonne als Funktion des Alters(Bahcall et al. 2002)

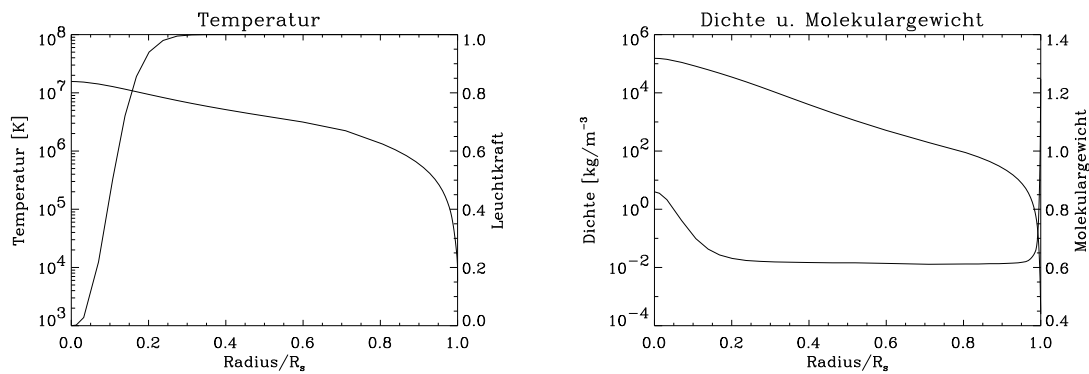


Abbildung 19: Linkes Bild: Temperatur (dick, linke Skala) und Leuchtkraft (dünn, rechte Skala). Rechtes Bild: Dichte (dick, linke Skala) und Molekulargewicht (dünn, rechte Skala) als Funktion des Radius

M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	P [Pa]	T [K]	ρ [kg/m ³]	L/L_{\odot}	μ
1.0000	1.0000	9.550E03	5.778E3	2.512E-4	1.000	1.247
1.0000	.9994	5.641E04	1.163E4	6.704E-4	1.000	1.139
1.0000	.9988	1.843E05	1.382E4	1.689E-3	1.000	1.044
1.0000	.9959	6.429E06	2.257E4	2.928E-2	1.000	.832
1.0000	.9944	2.101E07	2.783E4	7.272E-2	1.000	.769
1.0000	.9894	2.243E08	4.929E4	3.881E-1	1.000	.674
1.0000	.9820	1.325E09	8.938E4	1.191E0	1.000	.644
.9999	.9611	1.414E10	2.073E5	5.187E0	1.000	.620
.9996	.9415	4.620E10	3.273E5	1.058E1	1.000	.616
.9987	.9117	1.510E11	5.209E5	2.152E1	1.000	.614
.9978	.8917	2.729E11	6.580E5	3.069E1	1.000	.613
.9904	.8057	1.586E12	1.320E6	8.826E1	1.000	.612
.9746	.7101	5.959E12	2.230E6	1.955E2	1.000	.611
.8569	.4611	1.205E14	4.403E6	2.039E3	1.000	.616
.6342	.3117	9.321E14	6.583E6	1.058E4	.999	.619
.3388	.2013	4.255E15	9.362E6	3.444E4	.940	.631
.08976	.1072	1.254E16	1.280E7	8.193E4	.503	.699
.0000	.0000	2.338E16	1.565E7	1.533E5	.000	.860

Tabelle 5: Modell der heutigen Sonne (aus: Stix, 2002)